對數概念及運算錯誤類型之研究
－以高雄市五所高職學生為例

田銘舜

摘　要

對數單元是中學階段基礎數學相當重要的一個環節，本研究之主要目的在探究高雄市高職學生在對數概念與運算方面之錯誤類型，以及形成錯誤的可能原因。

本研究係採調查研究法爲之，研究對象爲高雄市五所公立高職高二學生共計 606 名。先運用數學教師對高職學生在對數運算錯誤類型調查問卷資料編製預試試題，透過預試結果進行難度與鑑別度分析暨修正後，編製「高雄市高職學生對數概念及運算評量試題」，經正式施測後，再歸納彙整出調查發現；並分層選取 6 位受試者進行非結構性訪談，確認對數概念與運算錯誤情形及造成錯誤的原因。

研究發現高職學生在對數概念與運算方面的錯誤類型有下列 6 項：

一、指數定義遺忘及誤用算則

二、輕忽對數符號與定義，無據推論

三、對數運算性質望形生義，形成錯誤連結與類推

四、指數、底數與真數的限制條件區隔不清

五、因缺乏自信，導致無法完成運算而停滯不前

六、無方向的答題過程或其他筆誤的類型

最後針對研究結果，提出 3 項建議供教科書編寫、教師教學及評量上參考：

一、爲引起學習動機，應適度加入對數在數學史上的源起，如航海方位判定、測繪與天文學的三角計算應用等。

二、加強學生先備知識，以期在指數運算及對數性質的連結上，能清晰地掌握要旨。

三、注意學後評量的重點，應以概念釐清與避免錯誤推論爲主。

關鍵詞：對數、錯誤類型、高職學生

*高雄市立高雄高工數學科教師 / 台灣師範大學數學系，高雄師範大學數學系教學碩士

摘　　要

對數單元是中學階段基礎數學相當重要的一個環節，本研究之主要目的在探究高雄市高職學生在對數概念與運算方面之錯誤類型，以及形成錯誤的可能原因。

本研究係採調查研究法爲之，研究對象爲高雄市五所公立高職高二學生共計 606 名。先運用數學教師對高職學生在對數運算錯誤類型調查問卷資料編製預試試題，透過預試結果進行難度與鑑別度分析暨修正後，編製「高雄市高職學生對數概念及運算評量試題」，經正式施測後，再歸納彙整出調查發現；並分層選取 6 位受試者進行非結構性訪談，確認對數概念與運算錯誤情形及造成錯誤的原因。

研究發現高職學生在對數概念與運算方面的錯誤類型有下列 6 項：

一、指數定義遺忘及誤用算則

二、輕忽對數符號與定義，無據推論

三、對數運算性質望形生義，形成錯誤連結與類推

四、指數、底數與真數的限制條件區隔不清

五、因缺乏自信，導致無法完成運算而停滯不前

六、無方向的答題過程或其他筆誤的類型

最後針對研究結果，提出 3 項建議供教科書編寫、教師教學及評量上參考：

一、爲引起學習動機，應適度加入對數在數學史上的源起，如航海方位判定、測繪與天文學的三角計算應用等。

二、加強學生先備知識，以期在指數運算及對數性質的連結上，能清晰地掌握要旨。

三、注意學後評量的重點，應以概念釐清與避免錯誤推論爲主。

關鍵詞：對數、錯誤類型、高職學生

第一章　緒　論

第一節　問題背景與研究動機

對數概念與運算的重要性，在於能馭繁瑣以簡約，使得處理複雜龐大的數據時駕輕就熟。對照當前職業學校教育目標中：培養繼續進修之興趣與能力，以奠定其生涯發展之基礎。（教育部 職業學校 98 群科課程綱要 2007）以及數學課程目標：(一)培養學生基本演算與識圖能力，以應用於解決日常實際問題，及未來工程專業及資訊應用領域內實務問題。(二)增強學生基礎應用能力，以培養學生未來就業、繼續進修、自我發展的能力（教育部 職業學校群科課程綱要－一般科目 2008）顯示了對數單元在基礎數學紮根中之重要性。時下學生受限於計算能力薄弱，或覺得抽象思考、推理論證過程索然乏味、徒具形式；於是不能以活用、理解代替死背、記誦相關科學知識，使得在概念學習歷程中，「錯誤率」就成爲一項重要的研究指標。

段麗凌、譚瑞林與國靈華（2008）探討了高職學生之數學困難主因有：1.數學思考能力差：學生須有良好的認知結構，方能形成優良的思考品質，否則徒然手足無措，應變不及。2.只重做題的學習方法不當：學生大多被動接受，鮮少自己主動探索；於是亂套題型、機械模仿、死記硬背，造成事倍而功半。3.學習自信心不足：對較抽象的符號，無法理解貫通，又吝於付出精力求知，終致畏難怕苦而興趣闕如。

因對數與指數互爲反函數關係，其使用符號對大多數學生而言是很難理解的：一則不明白其出處來源，常產生書寫上的相對位置錯誤；再則源於指數律的運算不熟練，而對數性質卻皆由其衍生，學生在不求甚解之下，容易產生混淆不清或記錯、亂套公式。研究者希望透過調查，彙整出高職學生在處理對數概念與運算時，常出現的錯誤類型並探究其形成原因，除了能提醒學生往後複習時需加強注意的部份；也可作爲日後教師在教學上的參考，使其能做好教學前的準備工作，及教學後的診斷與補救，進而幫助學生導正謬誤，乃爲本研究之動機所在。

第二節　研究目的與待答問題

一、基於上述的研究動機，本研究之目的如下：

（一）瞭解高職學生在對數概念與運算上的錯誤類型。

（二）探討高職學生在對數概念與運算發生錯誤的原因。

（三）綜合研究結果，提出具體的建議，以供日後編纂教科書、或教師補救教學及進行其他研究之參考依據。

二、本項研究之待答問題如下：

（一）高職學生在對數概念與運算的錯誤類型爲何？

（二）高職學生在對數概念與運算發生錯誤的原因爲何？

第三節　名詞界定及釋義

一、對數概念與運算：此處係指中學數學教材範圍內，有關對數單元的相關概念、定義及符號使用，以及利用對數的運算性質來求值及計算。惟不涉及對數函數的圖形討論與查表、內插法及對數表的應用。

二、錯誤類型：在數學計算式中產生錯誤答案的步驟，依據其犯錯的關鍵處，可分成幾種的型態，稱為錯誤類型（Kathleen 1987）。本研究所討論的錯誤類型，係指透過學生回答研究者自編的「對數評量試題」後，將5個人以上有相同的錯誤答案型態歸類成同一類型，若學生的回答內容與本研究有高度相關者，即使未達5人，也自成一類型供討論；而若產生同形式之錯誤人數小於5人者，即歸類為其他類型。

三、高職學生：本研究之高職學生，是指高雄市五所公立高職，已學過高職版數學教材指數與對數單元的高二學生。

第四節　研究限制

本研究的限制為：

一、研究樣本方面：預試樣本為高雄市某高職的高三學生1班。正式施測樣本為高雄市5所公立高職的高二學生各2至8班不等，故應參酌此狀況，日後做推論時，不宜過度引申。

二、研究工具方面：本研究之對數運算評量試題，係擷取學生已習畢之高一教材內容而設計，題目範圍只包含教育部頒職業學校群科課程暫行綱要（2005）第二冊的對數單元，因此，測驗的內容有其限制性。

三、施測時程方面：約在高二下學期的五至六月間，回溯所有樣本自高一入學後，學習完此單元的內容，不論是工科或商科學生，皆已超過了至少半年以上。

四、其他方面：本研究主要在探討高雄市的高職二年級學生，有關對數概念與運算的錯誤情形，並未探究到其他變項諸如地區、性別與年級等，對錯誤情形或錯誤原因的影響。

第二章　文獻探討

要正確熟稔地進行對數計算的關鍵，是能清楚地掌握其定義的概念與運算性質，但這對於高職學生的接受能力來說，確實是不易理解通曉的，因此教師在日常的考查評量上，就常發現一些似是而非的謬誤。所以本研究所探討的文獻，主要分四部份來討論：概念的學習與符號表徵、錯誤類型的相關研究、錯誤原因與解題思考的研究及對數單元相關研究。

第一節　概念的學習與符號表徵

一・概念的學習

所謂「概念」：是事件或物體的屬性以符號表示者。其在一件有意義的學習歷程中，擔任了吃重的角色。當人們能探尋出事物的規則性，而嘗試用符號代替它時，就形成了概念。它的內涵並非完全靜態的，隨著知識不斷累積，人們對概念的意義也會發生改變。

數學基本概念的重要性，猶如其構造元素中的原子單位，它是對客觀事物本質屬性的反映，若對概念缺乏清晰、明確的理解，則思維沒有根據，能力就無法培養，所以習取概念是數學學習中的重要關鍵。Skemp（1985）認爲對於一個概念的瞭解或學習，是指學習者能將所學的方法與問題聯結起來，並將知識應用在新的問題上，而非僅學習記憶零星的、固定的解題策略。即是在概念結構或謂基模上，學習成功者往往能以此基模製造出無限多的策略，以達解題目的。學習數學的兩個原則是：一是高層次的概念：除了以定義溝通之外，更需藉著蒐集相關的例子說明；二是所蒐集的這些例子，在學習者的心中須已形成概念（林碧珍，1985）。此外柳賢（2001）也曾提到，概念係指操作事項的活動或運思，經過抽象後所得的數、量、形性質。

二・符號表徵

數學學習係以建構一套符號系統來代表數學概念爲重點，並以溝通和問題解決爲目標。由於表徵系統乃個人在社會文化影響之下，逐步發展而得的思考工具，其一方面是個人建構的成果，是內在的；另一方面也是社會文化的產物，是外在於個人實體，並具有社會約定俗成的意義（Putnam,Lampert,&Peterson 1990）。因而，學生在學習數學時，必須獲得此表徵的意義，並使其成爲溝通的工具，從而能使用它進行問題解決（蔣治邦，1994）。以此觀點而言，學校進行數學教育的目標之一，即在於引導學生去建構或內化社會共通的數學符號系統，以使能進行數學思考，進行數學式的溝通（游自達，1995）。

劉云章（1993）認爲數學的抽象推論和概括性是數學的特點之一，它運用專門的數學符號進行運算，用傳統的符號名稱表示數量、數的關係及空間的特性，所以，數學概念與定理的溝通都要靠語言與符號。Skemp（1985）十分強調符號在數學學習過程中所扮演的重要角色，並將其功能歸納整理如下：1.溝通，2.記錄知識，3.形成新概念，4.使多重分類直接化，5.解釋，6.促成反應活動，7.有助於顯示結構，8.使常規計算自動化，9.回憶資料或理解，10.一種創造性的心智活動。

由以上可知，符號在學習過程中是多麼地重要。當你要使用一個概念時，可有兩種

方式記起它：一種是藉助實例，使你直覺但非自動地想起這個概念；另外一種是利用相關符號，使你自覺而主動地操弄這個概念（林義雄、陳澤民譯，1985）。

第二節　錯誤類型之相關研究

Schwarzenberger（1984）表示：錯誤在數學中和正確的答案一樣重要，有時更有過之而無不及。錯誤幫助了數學的發展；也幫助我們瞭解數學的來龍去脈；錯誤可作爲診斷工具－讓我們瞭解學生心裏可能的想法，其錯誤並非漫無目的發生，而是有其理由的。

而郭汾派、林光賢與林福來（1989）的研究指出，國中生學習文字元號時常犯的一些錯誤包括：將$2x+y$表示成$2xy$；以$a^2=a+a$；或$2a=a\times a$等；皆是將文字元號想成整數或某些特定數字，而非當做變數。其主要的錯誤形態可列出如下(郭汾派等，1991)：

1.帶分數模式：以為文字元號的運算，可用帶分數的觀念來類推。如：$7+\frac{1}{2}=7\frac{1}{2}$，故4+3n=7n。

2.將係數、文字分別處理：當學生對符號運算不完全瞭解時，會認為須化至單項式方為答案，因此強迫自己進行合併操作；或將各不同類項的係數先行運算，再將未知數置於其後。如求2a+5b=？其答案可能為：7ab, 7+ab,7(a+b),7+a+b等。

3.認為不同文字代表不同數：學生將文字視為某一特定的數，故將不同的文字看成不同的數字，認為無相等之可能性。如：2x=2y，必無解。

4.將文字當特定數處理：學生認為答案一定是一個已知數，故遇答案為文字時，常以特定數來做，無法建立好公式一般化觀念。

5.受定義影響：學生有時會誤解題意，而作出錯誤答案。

石函早與胡俊山（2007）提出數學錯誤概念產生的原因有：1.學生認知方面：在生活經驗中的日常概念上，易導致對抽象層次較高的數學概念有錯誤理解。其次，學生思維的消極定勢或負遷移，會產生錯誤地類推。2.教師教學方面：要注意全面展示概念的本質屬性，不論內含或外顯部份，否則學生易斷章取義。3.教材編寫方面：需注意嚴謹性，且編者自身的認知層次要降低其侷限性，以免影響學習者。

綜合以上所述，學生所犯的錯誤，往往會有系統性地一再發生，當實地因應解題需要時，就自行異想天開地發明一些作法。整體而言包括：基礎概念的缺乏或不正確、使用不恰當或錯誤的解題策略、毫無依據的推論過程、有意無意地漠視條件、憑直覺或關鍵字逕行反應等。至於高職學生在處理對數概念與運算上，是否也會發生類似情形，將是本研究所關心的重點。

第三節　錯誤原因與解題思考之相關研究

學生之所以在答題時犯錯，若從認知心理學的角度來審視，是因其於教師進行教學活動前，思想狀態並非處於完全空白，以致於無法將教師所教的內容，全部加以學習並吸收；亦即學生所學到的東西，並不一定是全來自於教師所授予，相反地，由於學生本

身具備主動建構知識的能力，就不可避免地涵蓋了一些錯誤概念或運算規則。故在陳麗玲（1993）的研究即指出：學生的數學作業不僅僅是一個分數而已，更要試著去分析它。因為導致他們錯誤的原因是錯綜複雜的，即便犯下相同錯誤，也可能是不同的訊息處理過程所導致。

楊弢亮（1992）認為學生作業中發生錯誤的原因，可歸納為下列幾種：

1.概念混淆：如代數式與等式的概念混淆，就會把等式中恆等變形的法則誤用到代數式上去，造成形如 $\frac{b+c}{a}+\frac{b-c}{a}=b+c+b-c=2b$ 的錯誤。

2.定義不明確：如把點到直線上任一點的距離，當作“點到直線的距離”。

3.定理理解不清楚：如混淆了判定定理與性質定理，誤以為原命題成立，逆命題也成定，或是沒有分辨清楚條件是充分的還是必要的。

4.條件不注意：如在反三角函數關係式 $\sin(\sin^{-1}x)=x$ 中，沒有注意到 $-1\leq x\leq 1$ 這個條件，產生 $\sin\left(\sin^{-1}\frac{3}{2}\right)=\frac{3}{2}$ 的錯誤。

5.邏輯錯誤：如幾何論證中根據不足，或是推理不合邏輯；在軌跡的探求或證明中，沒有同時說明純粹性和完備性。

6.法則不會：如三角函數表的查表法不會，查 $\cos 42°14'$ 的值時，出現 $\cos 42°12'$ 的值加上相應於 $2'$ 的修正值的錯誤。

7.公式記錯：發生 $(a+b)^2=a^2+b^2$ ，$\sin(A+B)=\sin A+\sin B$ 的錯誤，如很多三角公式也是容易記錯、用錯的。

8.計算錯誤：主要是粗心大意或慌亂而造成的。

Skemp（1979）首先定義「基模（schema）」為「連接概念的一種結構組織」，強調概念的結構或基模的發展，將影響學習者解題的策略。現今的教育潮流趨向於學習者自由建構的學習方式，將新訊息與既有的知識串聯，與所見的基模相契合。Larkin & Chabay（1989）也指出：學習者需要主動投入活動，並與適合的學習模式互動，用以激化和強化認知的成長。

綜合上述，學生的錯誤原因與解題思辯程式上大致上包含：先備知識不足、缺乏概念或概念不清楚、不正確地使用類推或運算過程、憑個人直覺或關鍵字逕做反應等項目。

第四節　對數單元相關研究

對數是繼乘方、開方之後的第七種數學運算。其與解析幾何、微積分被視為 17 世紀數學領域裡最偉大的三大成就，對人類作出巨大貢獻。它在功能上是一種比例數（ratio number），可將 0 到∞之間的正實數，按某種比例縮小，轉換成 0 到 1 之間的正純小數，再搭配整數呈現出來。另外亦將乘除算則轉化為加減式，開方、乘方轉化成倍數關係，於是我們只需用到查表及較為簡單的計算，就可以把複雜且高難度的過程充分解決，從而促進了生產技術和科學的發展。故 Pierre-Simon Laplace 說：「對數的發明，減輕了天

文學家的工作，並延長了他們的壽命。 *The invention of logarithms by shortening the labors doubled the life of the astronomer.*」

而在陳昭地等（1994）的高中生代數學習進展指標 I 中指出：對數函數概念分爲對數的基本概念、對數的性質、對數函數及其圖形、對數函數圖形與底數的關係等四部份：

1.對數的基本概念：主概念有：（1）對數的定義－$\log_a y = x \Leftrightarrow y = a^x$，（2）真數，（3）底數。及次概念為$\log_a x$有意義時，$y>0$，$a>0$且$a \neq 1$。

2.對數的性質：主概念有：（1）$\log_a rs = \log_a r + \log_a s$、（2）$\log_a r^s = s\log_a r$、（3）$\log_a r = \dfrac{\log_b r}{\log_b a}$。及次概念為（4）$\log_a a = 1$、（5）$\log_a 1 = 0$、（6）$\log_a \dfrac{s}{r} = \log_a r - \log_a s$、（7）$a^{\log_a r} = r$。

陳建蒼(2001)研究中，發現高一學生在對數函數的另有概念類型：可分爲對數函數的定義不清楚（如$5^x = 3 \Rightarrow \log_3 5 = x$）、對數函數符號的運用不正確（$2^{\log_2 5} = 2\log_2 5$、$\log_4 9 = \dfrac{9}{4}$ …）、錯誤使用對數函數運算性質（$\log_2(-2)^4 = -4$、$4\log_2(-2) = -4$、$\log_2 5 + \log_2 10 = \log_2(5+10)$、$\log\dfrac{2}{9} = \dfrac{\log 2}{\log 9}$、$\log_3 8^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\log_3 8}$ …）、指數函數概念的過度引申（$0.1^{-1000} = 100$、$\dfrac{4}{9} = \left(\dfrac{3}{2}\right)^{-\frac{2}{3}}$、$0.1^{\frac{-1}{2}} = 100$ …）等類型。

劉怡蘭（2001）指出學生在對數運算上的錯誤類型有：1.對數基本定義及符號使用錯誤、2.指數定義與運算錯誤、3.對數基本運算性質錯誤、4.忽略對數符號或底數的意涵、5.無法完成運算而停滯、6.其他筆誤或瞎拼胡湊的錯誤類型。

周淑梅（2002）研究中指出，當對數題目以無理數爲底時、真數與底數的關係爲分數次方、或題目形式明顯與規則相似時，尙記得定義的高二學生，較易發生不用定義改用規則解題的情形。而大多數高二學生認爲：對數的符號、想法不容易理解、學習。運算規則容易背錯或使用混淆，即使已背熟規則也無法順利解題。另外也表示對數與其他學習領域或生活沒有太大的關聯。

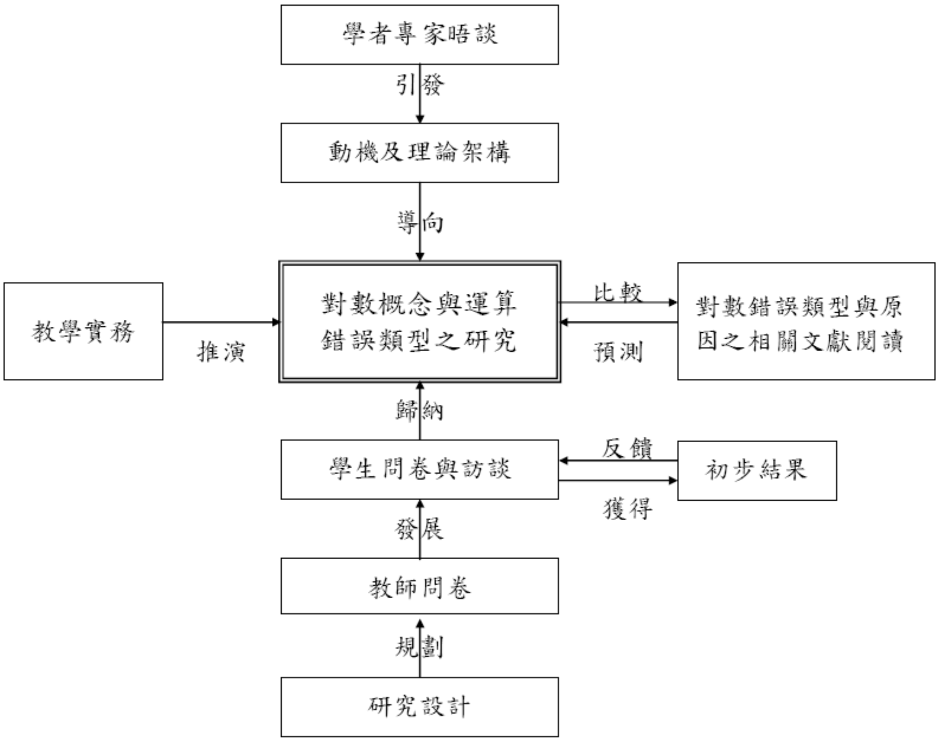
而在基礎公式$a^n = b, (a>0, a\neq 1, b>0)$中，已知 a、b 求 n 是操作對數運算；反之若已知 a , n 求 b 是作指數運算求冪次；已知 b、n 求 a 則是開方根的運算，然而學生常會將 a、b、n 的相對位置關係弄錯，導致張冠李戴；故本研究擬探討這些對數概念與運算上的錯誤類型及其發生原因。

第三章　研究方法

第一節　研究設計

本研究係採調查研究法，主要目的在探究高雄市高職學生，在對數概念與運算上錯誤情形及可能造成犯錯的原因。

研究設計程序爲：1.透過自編教師問卷，鎖定對數單元中，學生可能產生的錯誤，進行調查。2.從教師問卷填答結果中，抽取適當題目，設計預試問卷。3.經由預試結果，修正若干不合宜的題目，產生「對數評量試題」。4.確定各校樣本來源後，進行施測。5.統整彙集所有問卷資料後，挑選部分試題，向受試者進行非結構性的訪談。6.將訪談內容轉成錄音逐字稿，俾作進一步的研究分析。



【圖 3-1】　研究架構圖

第二節　研究對象

本研究的施測對象爲高雄市公立高職學生，經徵詢各校後，能獲得有效配合支持，以利測驗及訪談進行者：計含2所高工(南區與北區各一，總班級數分別爲55、72班，男多於女。)、2所高商(南區與北區各一，總班級數均爲54班，女多於男。)、1所工商合辦型學校(位於北區，總班級數爲54班，男略多於女。)，所選取研究施測的樣本，爲此5所高職之高二班級中，分別經由簡單隨機抽樣2至8班，共計得學生606名，在95年高一入學時之國中基測成績，大約分佈在160至210分(滿分爲300分)之間。人數分佈情形詳見

表3-1。

【表3-1】 研究對象之人數分佈表

學 校	A1	A2	B1	B2	C	合計
工 科	295	66	0	0	66	427
商 科	0	0	106	73	0	179
有效問卷	281	53	97	62	54	547
有效卷%	95.2%	80.3%	91.5%	84.9%	81.8%	90.2%
備 註	有效問卷係指至少完成作答一半以上題目者。					

第三節 研究工具

爲能調查出高職學生在對數單元的學習情形，研究者設計相關工具來蒐集所需要的資料，計有1.教師調查問卷（含統計結果及建議回饋）、2.對數評量預試卷（含難度與鑑別度分析）、3.對數評量正式卷（含作答情形統計與彙整結果）、4.非結構性的訪談逐字稿。茲說明如下：

一、教師調查問卷

二、自編對數運算評量試卷

依研究之需要，編製「高雄市高職學生對數運算概念評量試題」，以調查學生在對數單元的學習情形，並探討錯誤類型。詳述如下：

1、最初原始試題來源包括：文獻資料、高職版數學教材第Ⅱ冊及教師手冊、教師調查問卷所得結果及研究者本身教學經驗等。

2、正式試題（見附錄一）：由預試所得結果，編製正式施測試卷，並請資深教師及指導教授審閱，使試題更具專家效度及內容效度。其雙向細目表請參見表3-2。

三、非結構性的訪談錄音

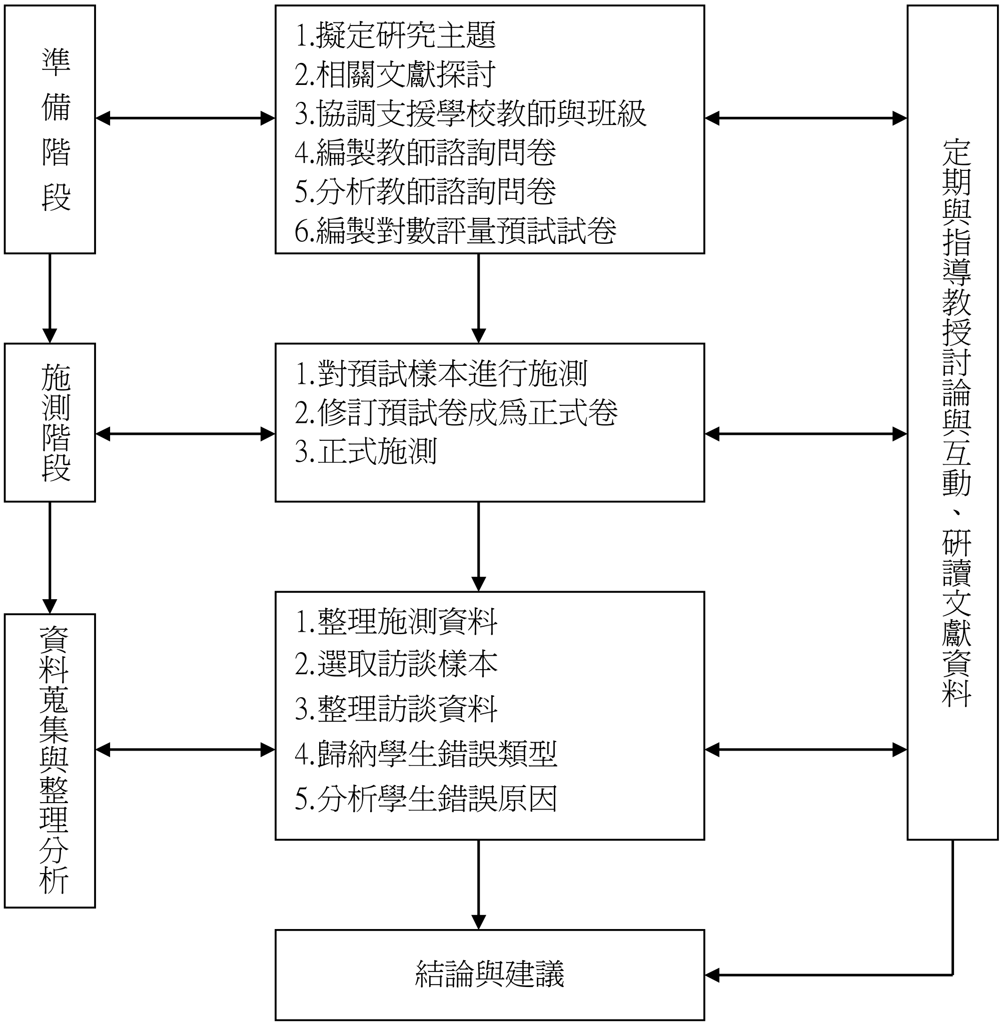
本研究之訪談對象係根據研究需要，並配合研究目的來選取。研究者先將試題答題情形作完統計整理，再依據錯誤率、空白率之高低，來選取訪談之試題數目及學生人數（粗分爲高分、中分與低分組，每組各2名），原則上以配合意願高之學生爲優先考慮。

【表3-2】「高雄市高職學生對數運算概念評量試題」雙向細目表

<table>
<tr><th colspan="3">4 層次
數學內容</th><th>概念
知識
(CK)</th><th>概念
理解
(CU)</th><th>程序
知識
(PK)</th><th>問題
解決
(PS)</th><th>合計</th></tr>
<tr><td rowspan="6">對數基礎
概念意義</td><td colspan="2">能利用指數
求解方程組</td><td>1（1）</td><td>1（2）</td><td></td><td></td><td>2</td></tr>
<tr><td colspan="2">對數式轉化爲
指數式</td><td></td><td></td><td>1（4）</td><td></td><td>1</td></tr>
<tr><td colspan="2">能以定義檢驗
對數值合理性</td><td>1（6）</td><td></td><td>1（3）</td><td></td><td>2</td></tr>
<tr><td colspan="2">對數式轉求真數</td><td></td><td></td><td>1（7）</td><td></td><td>1</td></tr>
<tr><td colspan="2">對數式轉求底數</td><td>1（5）</td><td></td><td></td><td></td><td>1</td></tr>
<tr><td colspan="2">求出對數值</td><td></td><td></td><td>1（8）</td><td></td><td>1</td></tr>
<tr><td rowspan="5">對數基本
運算性質</td><td rowspan="4">四則運
算性質</td><td>加法</td><td></td><td>2（1）</td><td></td><td></td><td>1</td></tr>
<tr><td>減法</td><td></td><td>2（5）</td><td></td><td></td><td>1</td></tr>
<tr><td>乘法</td><td></td><td>2（6）</td><td></td><td></td><td>1</td></tr>
<tr><td>除法</td><td></td><td>2（2）</td><td></td><td></td><td>1</td></tr>
<tr><td colspan="2">底數或真數
帶冪次化簡</td><td></td><td>2（4）</td><td>2（3）</td><td></td><td>2</td></tr>
<tr><td rowspan="2">對數四則
運算化簡</td><td colspan="2">底數相同型</td><td></td><td>3（1）</td><td></td><td>3（2）</td><td>2</td></tr>
<tr><td colspan="2">底數不同型</td><td></td><td></td><td></td><td>3（3,4）</td><td>2</td></tr>
<tr><td colspan="3">合計</td><td>3</td><td>7</td><td>5</td><td>3</td><td>18</td></tr>
</table>

第四節　實施步驟

本研究之實施步驟分為：準備階段、施測階段與蒐集資料並整理分析等3部分，茲說明本研究之實施流程:見圖3-2



【圖3-2】研究流程圖

第五節　資料分析與處理

本研究之資料處理分為三部分來探討：教師調查問卷的結果處理、對數運算評量數據結果分析及訪談資料之彙集繕打。

一、教師調查問卷的部分：

二、「對數運算評量」的部分：得到的有效樣本為547人。

三、訪談資料部分：

研究者事後分層選取6位受試者，將其訪談內容轉錄成書面文字檔案，儘可能地將學生的錯誤想法、運算過程記錄下來，再經原案分析整理出學生犯錯的原因。

第四章 研究結果與討論

本章就受試的高職二年級學生，在對數評量試題的表現來探究學生錯誤的情形，並藉由訪談的方式分析學生可能的錯誤原因。第一節統計整理學生在評量試題之錯誤情形；第二節分析學生在評量試題的錯誤類型；第三節進一步探究學生犯錯的原因。

第一節 學生在「對數評量試題」錯誤情形

本研究利用「對數評量試題」，進行調查受試學生在對數概念問題上的學習情形。將學生的施測資料經過整理歸納後，統計出試題中各題的空白人數、錯誤人數(包括空白人數)及所佔比率。學生在「對數評量試題」中的犯錯情形如表4-1所示：

【表4-1 學生錯誤情形統計表】

題　　目	列出錯誤過程人數	錯誤率%	空白人數	空白率%
1.(1) 若已知 $8^x=1024$，則此指數方程式有解。	93	39	6	1
(2) 若已知 $6^x=11$，則 $x=\log_6 11$ 爲其解。	7	20	13	2
(3) 設 $a>0$,若已知 $\log_a 100=2$,則 $\log_{\frac{1}{a}} 1000=-3$ 成立。	23	30	22	4
(4) 若將 $k=\log_3\sqrt{5}$ 改列指數式時，應爲 $k^6=5$。	19	27	55	10
(5) 若 $\log_x 625=4$，則x=5。	15	10	3	0.5
(6) $\log_{(-3)}9$ 是一個有意義的數值。	73	33	8	1
(7) 若 $\log_{\frac{1}{7}} x=-6$，則 $x=6^7$。	15	21	19	3
(8) 經計算可得 $\log_{2\sqrt{2}} 32\sqrt{2}=5$。	32	29	34	6
2.(1) $\log_2 5+\log_2 10=\log_2(5+10)$	14	21	6	1
(2) $\log\frac{16}{9}=\frac{\log 16}{\log 9}$	19	35	11	2
(3) $\log_3 8^{\frac{1}{2}}=\sqrt{\log_3 8}$	28	34	23	4
(4) $\log_5(-7)^2=2\log_5(-7)$	80	71	18	3
(5) $\log_5(24-7)=\log_5 24-\log_5 7$	12	26	14	2.5
(6) $\log 3\times\log 11=\log(3\times 11)$	9	27	23	4
3.(1) 化簡 $\log_3 27\times\log_3 9\div\log_3 81=$_____。	144	45	93	17
(2) 化簡 $\frac{\log_5 128}{\log_5 16}=$_____。	279	78	162	30
(3) 化簡 $\log_6 25\times\log_5 36=$_____。	102	67	257	47
(4) 化簡 $\frac{\log_2 9}{\log_4 27}+\frac{\log_2 16}{\log_3 243}=$_____。	105	78	326	60

第二節　學生在「對數評量試題」錯誤類型與說明

一、指數運算方面的錯誤

（一）指數定義轉換錯誤

＊試題 1.(1) 若已知$8^x=1024$，則此指數方程式有解。

$\boxed{\text{錯誤類型}}$：

1.認為只有$2^{10}=1024$，故此題為無解。犯錯人次：30　說明：計算時無心分辨$8=2^3$，只要在過程中產生疑慮，就慮應故事一下，或直接放棄。

2.$2^{3x}\neq 2^{10}$，或謂解出$x=\dfrac{10}{3}$，因非整數，故不合理。犯錯人次：61　說明：認為指數不應有分數形式，對解出之答案無信心，根本忘記了指數形式的差異。

3.因計算錯誤，而無法找出 x 之正確值。犯錯人次：2　說明：對自己計算超沒信心，也沒耐性再做一次，隨便應付。

＊試題 1.(4) 若須將$k=\log_3\sqrt{5}$改列成指數式時，應為$k^6=5$。

$\boxed{\text{錯誤類型}}$：

1.$k=\dfrac{1}{2}\log_3 5, 2k=\log_3 5$就做不下去了。犯錯人次： 12　說明：在從對數式轉換成指數形式上，仍無法熟練運用，迷糊以對，毫無方向。

2.$\log_3 k^{6^{\frac{1}{2}}}=\log_3 k^3, k=3$。犯錯人次：7　說明：雖然能代入真數中計算，但因隨意消去不該消去的數，導致求得錯誤解，忘了基本定義。

（二）指數性質計算錯誤

＊試題 3.(2) 化簡$\dfrac{\log_5 128}{\log_5 16}=$__________。

$\boxed{\text{錯誤類型}}$：

1.原式$=\dfrac{\log_5 2^7}{\log_5 2^4}=2^3=8$。犯錯人次：67　說明：雖正確化為指數形式，但因對對數性質一知半解，逕行以指數律相減。

2.原式 7-4=3。犯錯人次：6　說明：僅以指數相減，log 符號部份竟自行隨意消去。

＊試題 3.(3)化簡$\log_6 25\times\log_5 36=$__________。

$\boxed{\text{錯誤類型}}$：

1.$2\log_6 5\cdot 6\log_5 6=12\log_6 6=12$。犯錯人次：5　說明：草草計算指數，又任意消去真數與底數，不管 log 符號的意義，誤用公式。

2.$\log_6 5\cdot\log_1 36=\log_{6\cdot1}5\cdot 36=\log_6 180$。犯錯人次：14　說明：僅憑個人喜好，就直接將真數與底數相消，再直接將真數錯誤地相乘，誤用公式。

（三）指數方程式計算錯誤

＊試題 1.(7)若 $\log_{\frac{1}{7}} x = -6$ ，則 $x = 6^7$ 。

$\boxed{\text{錯誤類型}}$：

1.因計算錯誤，而無法找出 x 之正確值。犯錯人次：2　說明：將對數式轉換指數形式上，仍無法熟練運用，往往做到一半就停滯而做不下去或空白。

二、對數概念方面的錯誤

（一）底數、真數的條件錯誤

＊試題 1.(6) $\log_{(-3)} 9$ 是一個有意義的數值。

$\boxed{\text{錯誤類型}}$：

1.由 $-3^x = 9, x = 2$ 。犯錯人次：45　說明：逕行計算，枉顧定義的限制條件。

2.無法判斷底數不可爲負（-3）。犯錯人次：17　說明：搞不清楚底數的條件限制或根本就忘記了。

3. $\log_{3^{-1}} 3^2 = -2$ 。犯錯人次：9　說明：雖然對數計算正確，但輕忽底數條件限制，而完全不知不能計算。

4.底數只要不爲 1 即可。犯錯人次：2　說明：對基本定義模糊以對，含混帶過。

＊試題 1.(7) 若 $\log_{\frac{1}{7}} x = -6$ ，則 $x = 6^7$ 。

$\boxed{\text{錯誤類型}}$：

1.無法解出 $-\log_7 x = -6, x = 7^6$ 。犯錯人次：13　說明：將對數轉換指數形式上仍無法熟練運用，只好胡亂湊答或寫一半就停筆。

（二）對數基本定義轉換錯誤

＊試題 1.(2) 若已知 $6^x = 11$ ，則 $x = \log_6 11$ 爲其解。

$\boxed{\text{錯誤類型}}$：

1.將兩側同取對數， $x\log 6 = \log 11$ ，無法繼續做下去，故此題爲無解。犯錯人次：5　說明：只知取對數計算，卻無法正確解出，對公式一知半解。

2.因爲 $6\log_6 11 \neq 11$ ，故不合理。犯錯人次：7　說明：胡亂使用對數基本定義。

＊試題 1.(3) 設 $a > 0$,若已知 $\log_a 100 = 2$,則 $\log_{\frac{1}{a}} 1000 = -3$ 成立。

$\boxed{\text{錯誤類型}}$：

1.原式= $\log_{10^{-1}} 10^2 = -2$ 。犯錯人次：2　說明：隨意計算，輕忽草率。

2.計算左式= $-\frac{1}{3}$ 。犯錯人次：10　說明：認爲底數爲分數型，答案即應爲分數。

3.$\frac{1}{10}^{x}=1000, x=-4$。犯錯人次：5　說明：計算錯誤，加上誤算指數，粗心又草率。

4.因為 -3＜0，故此題為無解。犯錯人次：6　說明：將對數定義條件誤用。

＊試題 1.(5) 若 $\log_x 625=4$，則 $x=5$。

錯誤類型：

1.無法求出 $5^4=625$。犯錯人次：13 說明：指數基本運算錯誤，或者寫一半就停筆。

2.$\log_5 625=\log_5 5^3=3$。犯錯人次：2　說明：指數基本運算錯誤加上粗心。

＊試題3.(1)化簡 $\log_3 27\times\log_3 9\div\log_3 81=$__________。

錯誤類型：

1.$\log_3 3^3\cdot\log_3 3^3\div\log_3 3^4=3+2-4=1$。犯錯人次：24　說明：誤用對數性質，也被記憶口訣混淆了。

2.原式=$\log_3 9\cdot\log_1 9\div\log_3 81=\log_3 81\div\log_3 81=1$。犯錯人次：54　說明：直接消去真數與底數，任意計算，完全不顧對數性質的涵義。

3.原式$=\log_3(27+9-81)=\log_3(-45)$。犯錯人次：44　說明：誤用對數性質，也無法分辨真數定義的條件。

4.原式=3×2÷9=$\frac{2}{3}$。犯錯人次：22　說明：誤用對數定義，造成計算錯誤。

三、對數基本性質運用錯誤

（一）對數加、減化乘、除

＊試題 2.(1) $\log_2 5+\log_2 10=\log_2(5+10)$

錯誤類型：

1.無法由左式推得 log（5×10）。犯錯人次：9　說明：對數性質誤用或記不得了。

2.因為底數均為 2，故本式成立。犯錯人次：5　說明：直接將真數相加，完全不顧對數性質的精神。

＊試題 2.(5) $\log_5(24-7)=\log_5 24-\log_5 7$

錯誤類型：

1.無法由將右式推得 $\log_5\frac{24}{7}$。犯錯人次：10 說明：對數性質誤用，口訣混淆不清。

2.因底數均 5，故本式成立。犯錯人次：2　說明：直接取真數相減，完全不顧性質。

（二）對數乘、除化加、減

＊試題 2.(6) $\log 3\times\log 11=\log(3\times 11)$

錯誤類型：

1.無法將右式推得 log3+log11。犯錯人次：7　說明：對數性質誤用，轉換不熟練。

2.認為理所當然，並無問題。犯錯人次：2　說明：直接取真數相乘，完全不顧基本

定義及性質。

＊試題 2.(2) $\log\frac{16}{9}=\frac{\log 16}{\log 9}$

$\boxed{\text{錯誤類型}}$：

1.無法由左式推得 log16-log9。犯錯人次：9　說明：對數性質誤用，也混淆了口訣。

2.換底公式不熟練，$\log_b a=\frac{\log_x a}{\log_x b}$ ？犯錯人次：10　說明：誤用換底公式，與除法性質一起混淆了。

（三）在對數中，指數、真數的變化分辨不清

＊試題 2.(3) $\log_3 8^{\frac{1}{2}}=\sqrt{\log_3 8}$

$\boxed{\text{錯誤類型}}$：

1.無法分辨 $\frac{1}{2}\log_3 8=\log_3\sqrt{8}$ 與 $\sqrt{\log_3 8}$。犯錯人次：13　說明：無法分辨分數與指數意義不同之處。

2. $\sqrt{\log_3 8}=\log_{\sqrt{3}} 8$ ？犯錯人次：15　說明：分數指數意義無法區別，連帶指數誤用。

＊試題 2.(4) $\log_5(-7)^2=2\log_5(-7)$

$\boxed{\text{錯誤類型}}$：

1.忘記真數須＞0。犯錯人次：5　說明：對數基本定義記不熟練，僅知提出真數。

2.直接將指數乘開，左式=$\log_5 49=2\log_5(-7)$。犯錯人次：75　說明：誤用對數基本定義與真數的條件，隨意計算。

四、對數性質綜合運用錯誤

（一）根號－混合指數的計算

＊試題1.(8)經計算可得 $\log_{2\sqrt{2}} 32\sqrt{2}=5$。

$\boxed{\text{錯誤類型}}$：

1. $(2\sqrt{2})^5=32\sqrt{2}$ 。犯錯人次：17　說明：雖轉換正確，但根號部分計算錯誤，顯示基礎能力不足。

2. $\log_{2\sqrt{2}}(2\sqrt{2})^5=5$。犯錯人次：15　說明：根號計算錯誤，也是基礎能力太差。

（二）分數形式混合指數問題的錯誤

＊試題 3.(2) 化簡$\dfrac{\log_5 128}{\log_5 16}=$＿＿＿＿＿。

錯誤類型：

1.原式$=\log_5\dfrac{128}{16}=\log_5 8$。犯錯人次：100　說明：直接取真數相除，枉顧對數條件。

2.原式$=\dfrac{\log_5 2^7}{\log_5 2^4}=2^3=8$。犯錯人次：67　說明：真數次方化對了，但逕行將 log 符號上下相消，誤用對數運算性質。

3.原式$=7\log_5 2-4\log_5 2=3\log_5 2$。犯錯人次：7　說明：含混誤用對數運算性質。

4.原式$=\log_5(128-16)=\log_5 112$。犯錯人次：77　說明：直接取真數相減，誤用對數的除法性質。

5.原式$=7\log_5 2-4\log_5 2=\dfrac{7}{4}\log_5 1=\dfrac{7}{4}\cdot 0=0$。犯錯人次：6　說明：以除法亂做，誤用對數運算性質與公式。

6.原式$=\dfrac{\log 128}{\log 5}\cdot\dfrac{\log 5}{\log 16}=3$。犯錯人次：11　說明：雖換底公式正確，但只做到一半就停滯不前了。

7.原式$=\log_{16}128$。犯錯人次：5　說明：雖正確使用換底逆運算，但無法再由指數運算，化簡出應得對數值，差臨門一腳。

8.原式 7-4=3。犯錯人次：6　說明：誤用對數運算性質與除法公式。

＊試題 3.(4) 化簡$\dfrac{\log_2 9}{\log_4 27}+\dfrac{\log_2 16}{\log_3 243}=$＿＿＿＿＿。

錯誤類型：

1.$\dfrac{2\log_2 3}{\frac{3}{2}\log_2 3}+\dfrac{4\log_2 2}{5\log_3 3}=3+\dfrac{4}{5}=\dfrac{19}{5}$。犯錯人次：25　說明：對數運算正確，但分數除法誤用，顯示基礎能力不足。

2.$2\log_2 3^{2-3}+\dfrac{4}{5}=\dfrac{2}{3}+\dfrac{4}{5}=\dfrac{22}{15}$。犯錯人次：28　說明：誤用性質隨意計算，不求甚解。

3.$\log_4\dfrac{4}{3}+\dfrac{4}{5}=1-\log_4 3+\dfrac{4}{5}=\dfrac{9}{5}-\log_4 3$。犯錯人次：23　說明：誤用公式，態度輕忽。

4.$\dfrac{\log_2 9}{\log_2 54}+\dfrac{4}{5}=\dfrac{1}{6}+\dfrac{4}{5}=\dfrac{29}{30}$。犯錯人次：29　說明：指數算錯並誤用對數公式，亂做真數的消去。

（三）連鎖律無法應用得宜

＊試題 3.(3) 化簡$\log_6 25\times\log_5 36=$＿＿＿＿＿。

錯誤類型：

1. $2\log_6 5 \cdot 6\log_5 6 = 12\log_6 6 = 12$。犯錯人次：5　說明：粗心大意加上任意計算，亂消真數與底數。

2. $\log_6 5 \cdot \log_1 36 = \log_{6\cdot 1} 5 \cdot 36 = \log_6 180$。犯錯人次：14　說明：任意消去真數與底數。

3. $\dfrac{\log 25}{\log 6} \cdot \dfrac{\log 36}{\log 5} =$ ？犯錯人次：7 說明：雖正確換底，卻無繼續化簡，半途就放棄。

4.拆項得 $\log_6 25 + \log_5 36 =$ ？犯錯人次：12　說明：含混誤用對數性質。

5. $25 \cdot (\log 2 - \log 3) - 36(1 - \log 2) =$ ？犯錯人次：5　說明：誤用對數性質，亂做一通。

6.不瞭解連鎖律之意涵。犯錯人次：69　說明：印象中只知其名稱，但不知該如何使用，以致無法下筆。

第三節　學生在對數運算上之錯誤原因綜合分析

一、指數運算方面

在教師評估比率（約不到10%）與實際調查所得資料（均達20%之上）比較下，由卷面資料呈現與實地訪談同學可知：基本指數運算與轉換不熟練、距高一時期的學習已間隔約一年以上、概念遺忘或不清楚等均爲主要原因；另外自信心不足與意志不堅也形成容易「隨意猜答或直接放棄」，往往僅只要學生再多花一絲ㄧ毫的腦筋，就常先自我打敗說：「忘記了、不會啦等等」，故反映在計算過程中就是東掉西漏，虎頭蛇尾；而且也不相信自己的計算能力，算完之後的驗算檢查亦不確實，形成即使公式代入正確，也欠缺臨門一腳的最終結論。（Anderson & Jefferies 1985）

訪談實錄：
T:1(3)小題呢？也粗心嗎或想錯？
SL1:粗心吧？
T:應如何修正？
SL1:嗯，十分之一又 -3 次方=1000。
T:好，十分之一又 -3 次方=1000，那你覺得對嗎？
SL1:對吧，應該對吧。
T:可是你還是當時寫成 4，爲何呢？不寫別的數字？
SL1:十分之一看成 0.1，啊就寫 4。但現在知道了。當時有一點隨便寫寫。
970613SL1

在此部份中1(1)題的答對率，不論工科或商科學生均超過五成以上，差異不大。但其他題目中，若某些須混合指數律及對數性質計算時，就明顯發現工科學生表現優於商科學生許多，如1(3)、1(7)、1(8)題，即使兩方正確率也有五成以上，但卻差了近20%，或許反映在此兩種類科學生，平日所主修專業課程的訓練差異與實作技能要求上，。

二、對數概念方面

此部份產生較大的差異性，因爲在教師的調查問卷方面，均未考慮到學生的學習保留情形；但對606名高二學生做調查時，不論工科或商科，皆至少有一學期未曾直接接觸到對數單元。故爾連最基本的「底數＞0、底數≠1，真數＞0」條件都會搞不清楚，更遑論其他相關性質或公式。值得注意的是，一般工科學生在高二的專業科目中，或多或少仍會接觸到一些對數運算，故比起商科學生的錯誤率仍是低一些。但與教師的評估比率仍有數倍之差，相信當初若在高一學完後即時評量，應當不會如此。由卷面呈現資料過程與訪談同學可知：忽略或遺漏重要條件、缺乏先備知識、稍爲繁瑣的計算即沒信心等應爲錯誤之主要原因。所以導致隨意計算，自己想代什麼公式就代什麼公式，也不顧

初始條件的差異或限制，但也有一大部分是因相關公式型態相近，「外觀」上似是而非，使得同學在使用上產生千奇百怪的想法，再加上計算錯誤的致命傷，影響了學習對數單元的動力與興趣。（Silver 1982、Shuell 1990及蘇慧娟 1998）

訪談實錄：
T:請問你 2(2)題，此式為何你答圈？
SM2:之前是看到 2 除以 9，然後就打圈了。
T:那你現在知道要如何訂正嗎？
SM2:不知道。
T:剛好你 2(5)題也錯了，是否記得過去做 log 計算時，有一個加減法的公式，本題老師提示你應該用減法公式，你想起來了嗎？
SM2:若 log2 除 log9，應變為 log2－log9。
T:等一下，你是說左式或右式？
SM2:右邊。
T:故你說 $\log 2/\log 9=\log 2-\log 9$ *，好像不對吧。要確認一下嗎？*
SM2:……
T:嗯，從 2(1)題給你一些線索好了。
SM2:……
T:老師是說，若 2(1)題右式（）中改為乘號，有印象了嗎？故 2(2)題要怎麼修正？
SM2:……那 log9 分之 2，就會變成 log2 除以 9。
T:啊，好像不是喔。再由 2(1)題提示，log5+log10=log(5×10)，此題應如何處理？
SM2:變成 log2-log9 才對。
T:故不等於題目中的右式，此題為非。主要是看你們對除法的了解。所以接下來 2(5)題應如何改正呢？
SM2:那右式就要變成 log5 的 24 除以 7。
T:故如此對照下來，即可知你為何在 3(2)題犯下錯誤了。現在你回來看計算 3(2)題，有無心得？
SM2:……
T:我是說 $\log_5 128$ *寫成* $7\log_5 2$ *是對的，同理分母的表達也正確。可是你是錯在運算符號的處理上，現在你會改正嗎？*
SM2:不清楚ㄟ。
T:那老師提醒你一下好了，這裡不可用減號連接，而應整體以除號連接，故除了 7,4 之外，$\log_5 2$ *均相同，所以我們即可...*
SM2:約分。
T:對的，故可得答案為 $\frac{7}{4}$ *。故你的錯誤是將除號誤寫成減號，就搞混了。*
SM2:了解。
970617SM2

在此部份中1(2)、1(4)、1(5)、1(6)題的答對率，不論工科或商科學生均超過五成以上，差異不大。但實際訪談同學中發現，對定義或公式一知半解，往往僅是模糊以對，「呼隆」到答案就好；此點恰與專家問卷之意見吻合。而學習對數的主概念所在，正是基本定義 $\log_a y=x \Leftrightarrow y=a^x$ 、真數與底數的辨析（陳昭地等 1994）。故除學習當下了解明白之外，仍須配合不斷的複習才能保持學習效果。

訪談實錄：
T：請問妳 1(7)題，請把過程解釋給我聽。
SH2:就是把它換成底數 $\frac{1}{7}$ *，指數* $-\frac{1}{6}$ *，*
T：等一下，是 $-\frac{1}{6}$ *嗎？*
SH2:喔，是 -6 才對。
T：請繼續。
SH2:所以 $\frac{1}{7}$ *=7 的 -1 次方，再括號乘上 -6 次方，負號可消掉。*
T：消掉意思是？
SH2:負負得正。
T：故為相乘。
SH2:對，$\therefore 7^6=x$
970613SH2

三、對數基本性質綜合運用方面

延續上一部分的缺失，同學的答題表現（將近50％）與教師們的評估比率就漸漸接

近了，尤其是重要的四則運算性質。而工科學生雖比商科學生略優，但也僅止於相對熟練一些計算罷了，主要的錯誤原因就有：相似的計算性質混淆、受題目形式或編排誤導、似是而非的記誦口訣影響、或根本遺忘重要算則等。另外某些題目加上根號形式，或搭配分數形式，或加上指數律的運算；就更造成部份同學直接空白或放棄作答，故在四則綜合運算部分題目中，空白率幾乎與錯誤率不相上下。而教師們的評估比率也大致符合此一結果，在專家問卷中意見2、4，亦清楚指出：「學生對於對數運算性質無法掌控，且熟練度不足，計算能力待提升。」其次就是碰到較複雜的式子時，往往沒耐性做，也懶地整理，導致完全缺乏信心完成，可見得在每一階段的學習完成後，務必要回顧複習，否則徒然事倍而功半矣！

訪談實錄：
T:同學好，老師請問你一下，3(2)題，應如何訂正？
SM1:因爲底數一樣，故相除＝相減。
T:嗯，是這樣子嗎？不太對喔！再想一想。
SM1:就變成直接相除喔？
T:也不對喔。
SM1:是喔
T:老師提示一下，把 128,16 做處理。該如何做？
SM1:128＝2 的 7 次方，16＝2 的 4 次方。
T:再來呢？
SM1:將分子分母的 7,4 提至前面，就剩 $\log_5 2$ 。
T:然後呢？
SM1:相除就變相減…不是嗎？我忘記了。
T:其實你仔細看此式，不是相除變相減，而是…
SM1:就變 $\frac{7}{4}\log_5 2$ ，…
T:還有 log？
SM1:喔，就約分了，只剩四分之七。
T:對。答案即是如此沒錯。太緊張了喔。
SM1:（笑笑）
T:所以老師要提醒你們多注意。
SM1:之前算的時候常搞混，就是 log 相乘＝相加，而相除＝相減，我會搞混掉，不知何時應正確使用？
970617SM1

在此部份中2(1)、2(2)、2(3)、2(5)、2(6)題的答對率，不論工科或商科學生均超過五成以上，但彼此差異接近15％，或許也是和日常在校學習時，是否多「接觸」數學課程有關？因爲依現行教育部頒職業學校群科課程綱要，工科數學教材是編排每學期授課4學分＊2學年，而商科數學教材僅爲每學期授課2~3學分＊2學年，確實存在很大的落差。

其次就是第2(4)題須提出探討：此題答對學生約僅三分之一而已，與教師問卷調查所得差異頗大。經與訪談同學詢問後，發現大多是遺忘害了他們，因爲不少同學常抱著應付的心態在學習，使得學習內容消減速度快地令人吃驚！不論工科或商科學生皆然，尤有甚者，把指數、真數等基本名詞都忘地一乾二淨，無怪乎作答時只能隨便寫寫，望形生義，造成錯誤類化及恣意計算。（楊弢亮 1992，Maurer 1987，Gagne 1985，Kaput 1989）

訪談實錄：
T:同學好，老師請問妳一下，2（4）題知道爲何錯嗎？
SH2:因爲我當時未注意到 -7，它應該是正的才對，不是負的。
T：請問 -7 的身分是什麼？或名稱？什麼數？
SH2:虛數？
T：不是吧！
SH2:嗯。共軛複數？
T：也不是吧！我提示一下， 2^3 *中，2 是底數，3 是指數，故 -7 算何數？有印象嗎。*
SH2:嗯。有點忘記了ㄟ。
T：好吧，老師提醒妳一下， -7 的身分叫做真數，有印象了嗎？
SH2:喔喔，想起來了。

T：如妳所講，真數應>0 沒錯，故妳當時誤判了吧。
SH2:嗯……
T：老師再問妳 2(3)題，此式的左邊與右邊的差別在哪？
SH2:嗯嗯…，差別好像忘記了？
T：或者改成說：=的左右邊作比較，你爲何知道它錯？
SH2:log 好像沒用到根號吧？……我忘記了。
T：哇！糟糕，怎麼可以，上大學還要用呢。
SH2:就太久沒算了，故有點忘記了。
T：嗯，老師還是提示一下好了，左式如妳所寫的$\log_3 \sqrt{8}$ *，但右式爲*$\log_3 8$ *整體開根號，兩式不同的。*
SH2:嗯，了解錯在哪裡了，可以分辨。

970613SH2

最後在第3(1)、3(2)、3(3)、3(4)題的答題表現上，所有同學均不理想，而工科學生優於商科學生的差異比例竟然高達兩、三倍之譜，十分巨大，或許仍與入學後，實際上課時數與學習心態有別。其次檢視正確率偏低的原因應與空白率亦很高有關，從訪談同學中可知，想不起來、無從下筆，致使完全放棄作答者所在皆有；就算勉強「擠」出一些東西，也常是寫一些自己也解釋不清的過程出來，毫無方向可言。但其實這種綜合各種計算性質的題型，正是對同學們學習成果上的最佳驗收，有其相當的重要性。不論在對數性質的主概念：（1）$\log_a rs = \log_a r + \log_a s$、（2）$\log_a r^s = s\log_a r$、（3）換底公式。（陳昭地等 1994）學習上；或者是處理一些文字與符號的計算時，都要特別小心，嚴肅以對。才不會某些錯誤型態一犯再犯，如：以帶分數模式做文字符號的類推計算、將係數與文字分開處理、任意做併項消去的計算等。（郭汾派等 1991）

訪談實錄：
T:請問你 3(4)題，你爲何沒做完？
SM1:……
T:看你作法都對啊，怎麼這樣…？是時間不夠嗎？
SM1:啊就接下來不知道怎麼算了。
T:好那你現在改正一下。
SM1:就變成 $2\times\frac{2}{3}$ *，加上*$\frac{4}{5}$ *？*
SM1:要加$\frac{5}{4}$ *，*
T:對嗎？弄錯了喔。
SM1:對啊，我這邊就不太了解。就 log10 嗎？
T:嗯，我看一下，你後式的 4,5 提出去後，剩下來$\log_2 2, \log_3 3$ *爲多少？*
SM1:等於 1 喔。
T:上面與下面是否均爲 1？
SM1:對。
T:故全部爲…
SM1:1…，喔不，應爲$\frac{4}{5}$ *。*
T:故本題結論是$\frac{4}{3}+\frac{4}{5}$ *=…，那你怎麼寫到這裡就不見了。*
SM1:可能就直接把他化掉了，因爲$\log_2 2$ *，把 4 先提出去，然後 5 這邊就沒寫了。*
T:嗯，你既已提出 4,5，後面的 log 部分消去就不用寫了，可能你順手寫了 log，但卻又不知應再寫什麼？所以就卡在這裡。
SM1:嗯對。
T:所以才會沒做完它。下一次要小心喔！
SM1:（笑笑……）

970617SM1

第五章　結論與建議

本研究之主要目的：在探究高雄市高職學生在對數概念與運算的學習情形、錯誤類型及造成學生犯錯的原因。研究者在蒐集相關文獻資料之後，經過預試及與學者專家之討論修訂，完成各一份「教師調查問卷」及「對數概念及運算評量試題」，藉「評量」以調查學生在對數單元的錯誤類型，而「問卷」能藉由中學教師的實際教學經驗，初步地瞭解學生學習情形。

第一節　　結論

一、本研究發現，學生在學習時，教師常補充一些輔助口訣，來加強記憶某些重要性質及公式，原本是輔助學習上的不錯方法；但往往造成學生在短期內只記住最後的結果，而實際上對其使用的條件卻混淆不清，因而造成極高的錯誤率，而隨著學習期程延長數月甚至一年後，自然漸漸產生遺忘或闕漏不全的後遺症，故速記法則仍須植基於清楚的基本概念，並輔以適當的習題來熟練，也要定期做好回顧與複習的動作，如此才能得到學習效果。

二、有些學生在作答時，常會忘了底數、真數的意義？或各有何特殊條件限制？另外有些對數式的底數、真數是以指數型出現，難免因字母、符號書寫位置或大小不一的關係，而將底數、真數及指數次方部分混淆不清甚至合併計算，因此造成嚴重的錯誤情形，非常需要教師於教學時特別留意與糾正。

普遍而言，高職學生在當初高一入學的心態上即已居「學習的弱勢」，可能不是在英文就是在數學科目的學習上較不理想，或較無成就感。如同訪談學生時，往往隨口說出「忘記了、想不起來、我不會」；卷面資料的呈現上，就是隨意計算，亂套公式或自創算則，在在反映出學習的專心程度將影響學習成就與效果。故教師教學時要更加用心在基礎概念的建立，如何使學生從「恐懼數學、毫無興趣」慢慢進展至「起碼動筆寫寫看、好像不是這麼難算喔！…」的層次，就成為所有教師的嚴肅課題了。

三、研究者經彙集統合資料後，整理出高職學生在對數運算的錯誤類型有：1.指數定義遺忘及誤用算則、2.輕忽對數符號與定義，無據推論、3.對數運算性質望形生義，形成錯誤連結與類推、4.指數、底數與真數的限制條件區隔不清、5.因缺乏自信，導致無法完成運算而停滯不前、6.無方向的答題過程或其他筆誤的類型。

另外某些學生在填寫問卷的時機上，受到段考剛完或校外參觀（畢業旅行）結束返校，心情較放鬆的影響，並不是很專心地回答，致使發生的錯誤並無一定型態，即相同結構的題目，有的做對卻有的答錯；或原來作答正確，但受前後題目排序影響而做錯；也有少數學生則在一個題目的解題程序中，產生了數種錯誤的策略。而對照於歷年來國內研究者的結論，發現不論是高中學生或高職學生，在對數概念與運算上的錯誤類型其實大同小異，可見國內學子在初次接觸對數單元時，均有其一定的困難度與畏懼感，值得所有教師注意與關心。（陳建蒼 2001，劉怡蘭 2001及周淑梅 2002）

第二節　建議

根據本研究之結果與發現，研究者提出一些有關數學教學與進一步研究之建議，以作為教學或未來研究之參考。

一、對數學教學之建議：

（一）從訪談中發現，大部分學生只會作紙筆計算而已，至於學對數有何用途？就完全沒有任何概念。故教師在教學上，可先從介紹Napier在對數發展史上的貢獻，如先民於航海、測繪與天文學上的三角計算應用，及指數與對數的互逆關係切入，再多舉些現階段生活的應用實例，教導學生能利用對數化繁為簡，提升運算效率：諸如酸鹼濃度值（pH）；噪音分貝數（dB）、芮氏地震規模（Richter scale）等，讓學生瞭解對數的方便快速之處。另外教科書中亦列入了使用計算機的步驟，當今高職學生大多人手一台工程型計算機，應更易讓學生實際體會運用之。

(二)由研究結果發現，學生在學習對數單元時，必須具備某些先備知識，但往往是已遺忘殆盡或十分不足的，甚至不少人對於符號意義都一無所知且誤用。在訪談過程中就有學生（工科、商科皆然）只會算「 $\log_7 49 = 2$ 」，但無法解釋其意義；又如大部分學生了解$(-2)^3 = -8$成立，但在判斷$\log_{-2}(-8) = 3$的類型上，常遺忘了底數、真數的限制條件，亦如判定$\log_2(-2) = x$是不可能發生的，因為2^x必為一正數等。因此，在教師教學時，應要求學生掌握基本語法及句型：「以☆為底時，可求出□的對數等於△」；如上式$\log_7 49 = 2$即為「以7為底時，可求出49的對數等於2」，使學生理解特定符號是為了表示某個概念，而不是抽象且空洞的東西；而在專有名詞的界定釋義上，更須將各限制條件條列清楚。故教師於日後驗收教學成效時，須再三提醒學生特別注意與小心為是。

（三）學生在對數單元的錯誤原因，有部分是與先前學過的知識，做了不適當的連結，進而產生似是而非的解題，尤其是商科學生的表現最明顯；工科學生因某些專業科目上的計算要求，答題正確率就明顯優於商科，但仍是不乏需改正處要注意。因此，對於容易混淆的定義與性質，最好設法引導學生用「交叉對照」的方式，認識它們的區別及比較其異同處，以釐清相關概念，避免錯誤的推論與運算。而另有部分學生的錯誤，是因為誤植錯記了教師所授公式口訣的影響。因此，建議教師們在初始介紹運算規則時，就能儘量將其緣由、適用範圍及相關限制等向學生說明清楚，並於例題中充分演練示範，以免造成學生日後的誤解錯用。

二、對未來研究發展之建議：

(一)未來可針對高職版數學教材對數單元中，其他未探討到的主題如：對數函數特性、反函數圖形比較、應用對數表的延伸問題、或使用首、尾數求值的生活化題材。

(二)未來亦可針對高職其他不同類群（科）學生於習畢對數單元後，在高一、二、三年級之間，比較是否因間隔時程長短，使學習成就產生差異及學後保留情形的多寡等。

參考文獻

一、中文部分：

石函早與胡俊山（2007）。數學概念教學中的錯誤概念問題。**中國雲南保山師專學報，26.2**，46-49。

林義雄與陳澤民（譯）(1985)。**數學學習心理學**。台北市：九章出版社。(R. R. Skemp 1971)

林碧珍（1985）。數學概念的形成與學習。**國教世紀，21.2**，1-4。

周淑梅（2002）。**高二學生對數概念之保留與解題現象**。國立台灣師範大學數學系碩士論文，未出版，台北市。

柳　賢（2001）。數學科概念評核工具之開發與應用。香港中文大學，**數學課程全面檢討學術研討會論文集**，87-90。

段麗淩、譚瑞林與國靈華（2008）。淺談高職學生數學學習困難的原因及對策。**中國遼寧行政學院學報，10.1**，148-149。

徐品方與張紅（2006）。**數學符號史**。中國北京市：科學出版社。

國立台灣師範大學科學教育中心（1993）。**高級中學基礎數學教師手冊第二冊**。台北市：國立編譯館。

教育部（2007）。**職業學校群科課程綱要**。台北市：教育部。

郭生玉（1996）。**心理與教育研究法**。台北市：精華書局。

郭汾派、林光賢與林福來(1989)。**國中生文字元號概念的發展追蹤研究(3)**。國科會專題研究報告NSC-78-0111-S-003-005-A，國立台灣師範大學數學系，98。

陳　松（譯）（2008）。**數學的誕生**。中國上海市：上海科學技術文獻出版社。（Michael J. Bradley 2006）

陳昭地（1994）。高中生代數學習進展指標I。**國科會專題研究計畫報告**，台北市。

陳建蒼（2001）。**高一學生對數函數概念層次教學成效研究**。國立高雄師範大學數學系碩士論文，未出版，高雄市。

陳麗玲（1993）。**國小數學學習障礙學生計算錯誤類型分析之研究**。國立彰化師範大學特殊教育研究所碩士論文，未出版，彰化縣。

游自達（1995）。數學學習與理解之內涵－從心理學觀點分析。**國立台中師範學院初等教育研究集刊，84.3**，31-45。

楊弢亮（1997）。**中學數學教學法通論**。台北市：九章出版社。

劉云章 (1993)。**數學符號學概論**。中國安徽省：教育出版社。

劉怡蘭（2001）。**高雄地區高中生對數運算錯誤類型之研究**。國立高雄師範大學數學系碩士論文，未出版，高雄市。

蔣治邦（1994）。**由表徵觀探討實教材數與計算活動的設計**。甯自強編，八十二年度數學教育研討會論文及會議實錄彙編，131-149。國立嘉義師範學院。

蘇慧娟（1998）。**高雄地區國二學生方根概念及運算錯誤類型之分析研究**。國立高

雄師範大學數學系碩士論文，未出版，高雄市。
鄭惟厚（譯）（2000）。**毛起來說*e***。台北市：天下遠見出版股份有限公司。（Eli Maor 1994）
Schwarzenberger (1984)。錯誤的重要性。**數學圈，21**，73-80。

二、英文部分：

Anderson, J. R., & Jeffries,(1985). *novice Lisp errors: Undetected losses of information from working memory*. Human-Computer Interaction,1, pp.107-131.

Gagne,E.D.(1985). *The cognitive psychology of school learning.* Boston:Little,Brown and Company.

Kaput,J.J.(1989). *Linking representations in the symbol systems of algebra*. In S.Wagner & C. Kieran (Eds.), Research issues in the learning and teaching of algebra, (pp. 167-194) Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics & Lawrence Erlbaum Associates

Kathleen,T.T.(1987). *Error reducation strategies for whole number operations in grade four* .(Doctoral Dissertation,University of Brigham Young,1986).

Larkin, J. H.& Chabay, R. W.(1989). *Research on teachingscientific thinking:implications for computer-basedinstruction*.In Resnick, L. B.& Klopfer, L. E.(Eds.) Toward the thinking curriculum:current cognitiveresearch.1989 Yearbook of the Association for Supervision and Curriculum Development.Alexandria

Maurer, S. B.(1987). New knowledge about errors and new views about learners：*What they mean to educators and more educators would like to know* .in A.H.Schoenfeld (Ed.), Cognitive science and mathematics education (pp.165-187). N .J.:LEA.

Putnam,R.T.,Lampert M., & Peterson, P.L.(1990). *Alternative perspectives on knowing mathematics in elementary schools*.In C.B.Cazden (Ed.), Review of research in education (Vol.16, pp. 57-150).

Shuell, T.(1990). *Phases of meaningful learning*. Review of educational research, 60, 531-547.

Silver(1982). *Foundations of cognitive theory and research for mathematics problem solving instruction.*

附錄一　高職生對數概念與運算評量試卷（正式施測用）

1.本試卷共 3 大題(18 小題)，請您依序作答，並於每題空白處，<u>詳列作答理由或過程</u>。
2.作答過程中若有筆誤之處，請直接以「——」註記即可，切勿用立可白或橡皮擦塗改，再於空白處完成。

校名：____________ 抽測班級：__________科____班 座號：____ 姓名：____________

1. 請判斷下列各題敘述是否正確？若對請畫「○」，錯則打「×」。

(　　)(1) 若已知 $8^x = 1024$，則此指數方程式有解。理由：

(　　)(2) 若已知 $6^x = 11$，則 $x = \log_6 11$ 爲其解。理由：

(　　)(3)設 $a > 0$,若已知 $\log_a 100 = 2$,則 $\log_{\frac{1}{a}} 1000 = -3$ 成立。理由：

(　　)(4) 若須將 $k = \log_3 \sqrt{5}$ 改列成指數式時，應爲 $k^6 = 5$ 。理由：

(　　)(5) 若 $\log_x 625 = 4$ ，則 x=5。理由：

(　　)(6) $\log_{(-3)} 9$ 是一個有意義的數值。理由：

(　　)(7) 若 $\log_{\frac{1}{7}} x = -6$ ，則 $x = 6^7$ 。理由：

(　　)(8) 經計算可得 $\log_{2\sqrt{2}} 32\sqrt{2} = 5$。理由：

2. 請判斷下列各題敘述是否正確？若對請畫「○」，錯則打「×」。

(　　) (1) $\log_2 5 + \log_2 10 = \log_2 (5+10)$ 理由：

(　　) (2) $\log \dfrac{16}{9} = \dfrac{\log 16}{\log 9}$ 理由：

(　　) (3) $\log_3 8^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\log_3 8}$ 理由：

(　　) (4) $\log_5 (-7)^2 = 2\log_5 (-7)$ 理由：

(　　) (5) $\log_5 (24-7) = \log_5 24 - \log_5 7$ 理由：

(　　) (6) $\log 3 \times \log 11 = \log(3 \times 11)$ 理由：

3.試求出下列各式之值分別爲何? <u>並請詳列計算過程</u>！

(1) 化簡 $\log_3 27 \times \log_3 9 \div \log_3 81 =$ __________。過程：

(2) 化簡 $\dfrac{\log_5 128}{\log_5 16} =$ __________。過程：

(3) 化簡 $\log_6 25 \times \log_5 36 =$ __________。過程：

(4) 化簡 $\dfrac{\log_2 9}{\log_4 27} + \dfrac{\log_2 16}{\log_3 243} =$ __________。過程：

附錄二

高職生對數概念與運算評量試卷－作答情形統計表（正確%）

題序\項次	1（1）	1（2）	1（3）	1（4）	1（5）	1（6）	1（7）	1（8）	2（1）	2（2）	2（3）	2（4）	2（5）	2（6）	3（1）	3（2）	3（3）	3（4）
工職8班	**0.65**	**0.81**	**0.83**	**0.77**	**0.95**	**0.69**	**0.86**	**0.77**	**0.85**	**0.75**	**0.69**	**0.31**	**0.80**	**0.76**	**0.67**	**0.30**	**0.35**	**0.27**
工商2班	**0.44**	**0.70**	**0.46**	**0.69**	**0.87**	**0.63**	**0.83**	**0.69**	**0.54**	**0.52**	**0.70**	**0.26**	**0.61**	**0.44**	**0.50**	**0.17**	**0.19**	**0.13**
工職2班	**0.83**	**0.83**	**0.72**	**0.74**	**0.96**	**0.77**	**0.72**	**0.77**	**0.94**	**0.57**	**0.79**	**0.36**	**0.83**	**0.75**	**0.60**	**0.28**	**0.66**	**0.43**
商職3班	**0.58**	**0.81**	**0.66**	**0.75**	**0.86**	**0.54**	**0.71**	**0.62**	**0.79**	**0.60**	**0.59**	**0.19**	**0.73**	**0.79**	**0.38**	**0.12**	**0.34**	**0.15**
商職2班	**0.47**	**0.73**	**0.37**	**0.61**	**0.73**	**0.73**	**0.61**	**0.55**	**0.60**	**0.48**	**0.52**	**0.34**	**0.53**	**0.69**	**0.27**	**0.03**	**0.10**	**0.02**
工職12班	**0.64**	**0.80**	**0.76**	**0.75**	**0.94**	**0.69**	**0.84**	**0.76**	**0.82**	**0.69**	**0.71**	**0.31**	**0.78**	**0.72**	**0.64**	**0.28**	**0.37**	**0.27**
商職5班	**0.53**	**0.78**	**0.55**	**0.70**	**0.81**	**0.61**	**0.67**	**0.59**	**0.72**	**0.55**	**0.56**	**0.25**	**0.65**	**0.75**	**0.34**	**0.09**	**0.25**	**0.10**
高職17班	**0.61**	**0.80**	**0.70**	**0.73**	**0.90**	**0.67**	**0.79**	**0.71**	**0.79**	**0.65**	**0.66**	**0.29**	**0.74**	**0.73**	**0.55**	**0.22**	**0.33**	**0.22**