高三學生矩陣基本運算及應用錯誤類型之分析研究

黃雅琪

摘　要

本研究主要目的是探討高三學生在矩陣之運算和平面幾何變換的錯誤類型及讓學生犯錯的原因。

本研究採用紙筆測驗和面談相互配合的方式進行。紙筆測驗收集學生犯錯的情形和原因，進行統計分析，面談採非結構性的面談計畫，了解學生對矩陣的想法和其應用時作答的順序概念，以便分析其概念發展層次並探討錯誤類型。

本研究的主要發現：

一、　受測學生在矩陣單元的基本概念和應用運算錯誤類型分析：

（1）　矩陣的基本運算

1. 對矩陣的定義模糊不清。
2. 矩陣加減法運算的計算錯誤。
3. 矩陣乘法的運算法則錯誤。
4. 誤以爲矩陣乘法都具有交換律。
5. 誤以爲矩陣方程式都具有消去律。
6. 誤以爲所有矩陣均有反矩陣。
7. 誤以爲矩陣的實係數積運算和行列式的實係數積運算相同。

（2）　矩陣的應用

1. 和日常生活的經驗結合，利用表格呈現，矩陣行列的混亂。
2. 求矩陣冪次方時的運算錯誤。
3. 機率矩陣、轉移矩陣的應用錯誤。
4. 高斯消去法的計算錯誤。
5. 二階矩陣所代表的平面變換：平移、鏡射、旋轉、伸縮、推移，變換後之圖形和方程式的錯誤。

目次

關鍵詞：矩陣、錯誤類型。

一、緒論

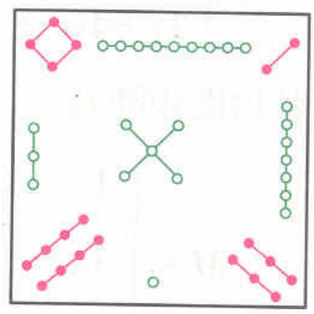
矩陣一詞最早於西元 1851 年由英國數學家席爾維斯特(James Joseph Sylvester,西元 1814~1897)使用，他曾使用矩陣來描述一些數作為長方形狀的有序排列，但不使用行列式這個名詞來表示長方形排列。在西元 1858 年由英國數學家凱利(Arthur Cayley,西元 1821~1895)做有系統介紹矩陣理論及其相關性質。

傳說大約在三千多年前夏禹治水時，在洛水裡出現一隻大烏龜，龜背上刻有奇特的圖案，如圖（一）所示，人們將它取名為「洛書」，如果把這圖案上一條條直線上的圓點數目記下來，便得到正方形排列如表（一）所示。這個正方形排列有一個奇特的特質，就是每一行、每一列及兩條對角線上的三個數字之和都是 15，這就是著名的三階魔方陣，有稱作「九宮」，可視為矩陣的實例。

矩陣除在數學上被廣泛應用外，亦可應用在物理有關電流分布，商業或經濟有關生產與消費的輸入輸出模式及有關機率問題的馬可夫鏈(Markov chain)等。

目前國內外對於學生在矩陣概念學習的研究較少，因此本研究以解釋高中生對矩陣概念學習錯誤類型，並進一步明白學生概念錯誤的原因，提供個人及教師日後改善教學及補救教學的參考。

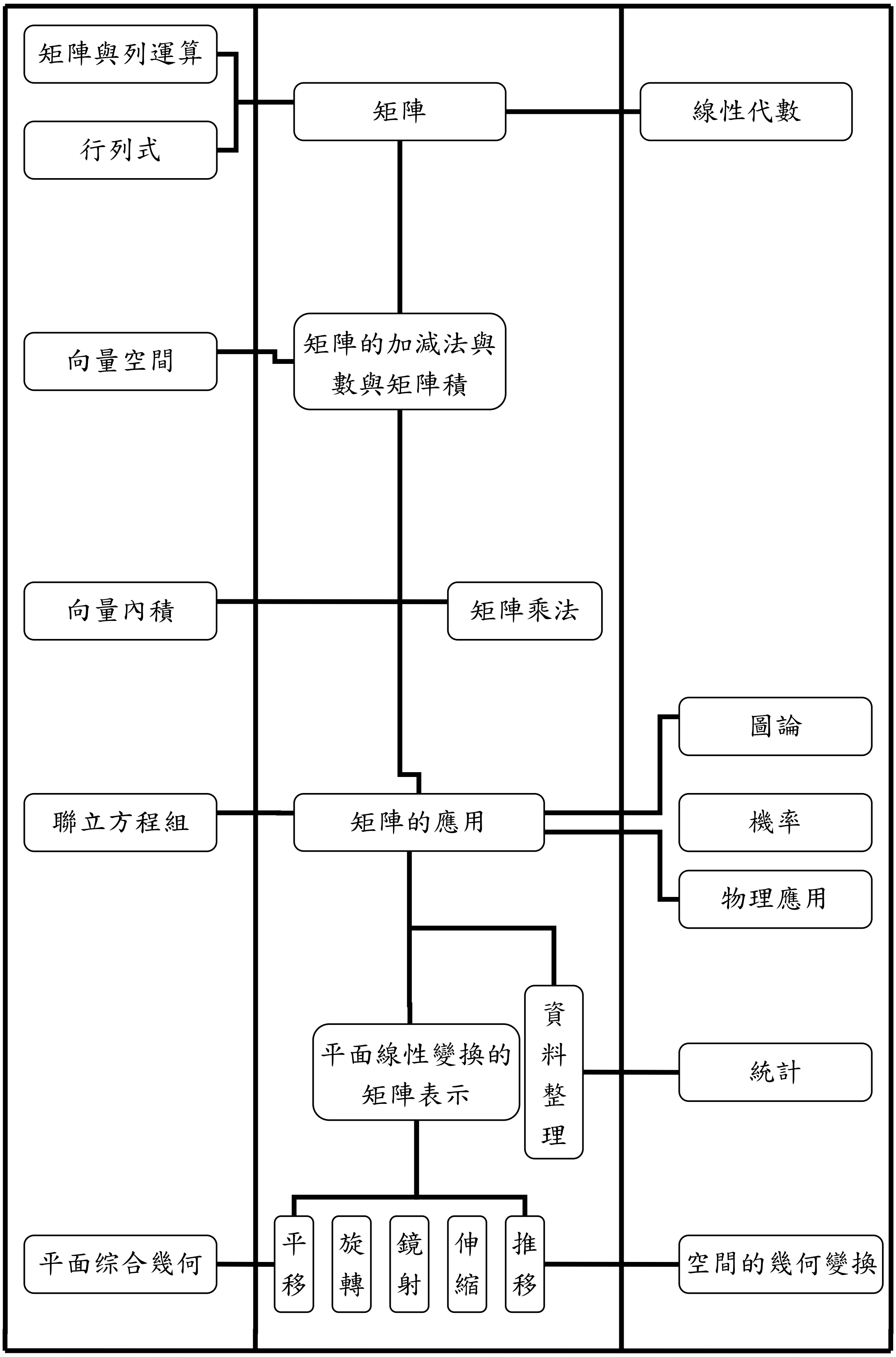
矩陣為高中學生學習的一個新的概念，根據康熙圖書版高中數學乙本上冊第一章，我們來分析一下矩陣的教材地位，如下頁【圖 1-1】所示：



圖（一）

4	9	2
3	5	7
8	1	6

表（一）



矩陣與列運算
行列式
矩陣
線性代數
向量空間
矩陣的加減法與
數與矩陣積
向量內積
矩陣乘法
圖論
聯立方程組
矩陣的應用
機率
物理應用
資料整理
平面線性變換的
矩陣表示
統計
平面综合幾何
平移
旋轉
鏡射
伸縮
推移
空間的幾何變換

【圖 1-1】矩陣的教材地位

二、錯誤類型及原因之相關研究

錯誤概念的產生，可能源自於學生日常生活中經驗的自我學習，也可能來自於學生對老師傳統機械式教學，所獲概念的不清不楚(呂溪木，1983)。教師若想確實幫助學生學習，就得先找出犯錯的原因，錯誤是學習的重要資源，教師讓學生知道自己所犯的錯誤，真正了解那是錯的，而不是因爲老師說那是錯的，學生就承認是錯的，這種過程在學習理論上叫做認知衝突。教師了解學生常犯哪些錯誤後，才有機會造成學生學習時的認知衝突，學理證明，經歷認知衝突後的學習比較有效果且穩固。

錯誤在數學中和正確的答案一樣重要，有些時候更是有過之而無不及，錯誤幫助了數學的發展，錯誤幫助我們了解數學的來龍去脈，錯誤可做爲診斷工具，讓教師了解學生心裡可能的想法，其錯誤並非漫無目的發生，而是有其理由的(Schwarzenberger，1984)。

一、錯誤類型：

Mayer(1985)將學生解題的錯誤分成三類：

1. 遺漏的錯誤(Omission error)：乃是因對命題不能完整回憶的結果。
2. 細節的錯誤(Specification error)：是指在陳述句中，一個變數轉換到另一個變數的能力不足所致。
3. 轉換的錯誤(Conversion error)：即無法將關係句的型式轉換爲陳述句的型式。

Mayer 指出，此三類錯誤中，以轉換的錯誤最爲嚴重。原因是很多學生對關係的回憶，缺乏表徵的語言知識所導致。

Marshall(1983)將學生的解題錯誤分成五大類：

1. 處理語言訊息錯誤(Errors In Processing Language Information)
2. 解釋空間訊息錯誤(Errors In Interpreting Spatial Information)
3. 選擇適當步驟的錯誤(Errors In Selecting Appropriate Procedures)
4. 概念連結的錯誤(Errors In Making Concept Association)
5. 應用不相干的規則和訊息(Errors In Using Irrelevant Rules Or Information)

二、錯誤原因：

以色列數學家(Movshoitz-Hadar,Inbar & Zaslavsky,1987)分析大學聯考的資料，將錯誤原因分爲六類(簡稱 MIZ 模式)：

1. 誤用資料(Misused Data)：作答時使用資料與原有資料不符。如:看錯題目、變數搞混、圖形資料不合等等。
2. 誤釋語文(Misinterpreted Language)：原文整理後轉譯到數學語言時所產生的錯誤。如:列錯方程式、圖形表達出錯等等。
3. 不合邏輯的推理(Logically Invalid Inference)：推理過程產生錯誤。如:使用不對的先備知識作爲解題的基礎。
4. 歪曲的定理或定義(Distorted Theorem Or Definition)：指已知的定理或定義其中的原則被曲解了。如: 利用乘法交換律求矩陣方程式等等。
5. 未驗算的答案(Unverified Solution)：所求出的答案合乎列式，但卻不符合題目中的情境。
6. 技術上的錯誤(Technical Error)：指計算上的錯誤。

三、　研究設計與架構

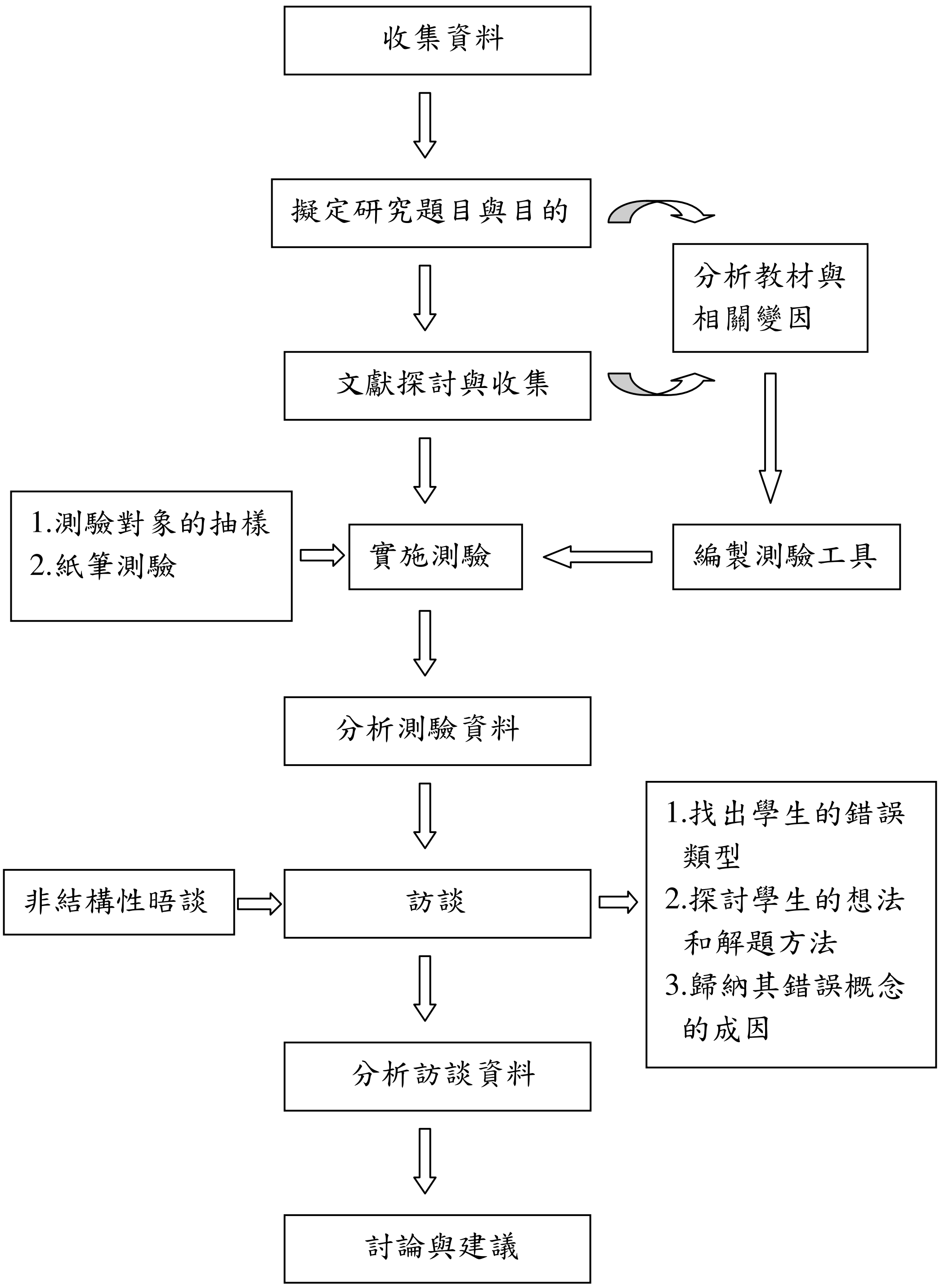
本研究主要目的是探討高三學生在矩陣之運算和平面幾何變換的錯誤類型及讓學生犯錯的原因，以達到學生更有效率的學習。本研究採用紙筆測驗和面談相互配合的方式進行。紙筆測驗收集學生犯錯的情形和原因，進行統計分析，面談採非結構性的面談計畫，了解學生對矩陣的想法和其應用時作答的順序概念，以便分析其概念發展層次並探討錯誤類型。研究流程和研究架構如【圖 3-1】。

本研究是以某國立高中高三學生抽取 A、B、C、D 四個班級，該校為常態編班，其中 A、B 為自然組，C、D 為社會組，共 175 位學生，樣本資料如下【表 3-1】；因為是常態的編班，所以樣本包含全校數學學習成就高、中、低三種成就的學生，期盼能呈現出全部高三學生對矩陣的學習狀況。

針對自然組和社會組學生各抽取數位學生實施個別晤談，在晤談過程中詳細詢問其解題的歷程和其對矩陣概念的學習情形，以了解不同能力學生的錯誤概念來源之差異。

班級	A		B		C		D		總人數	
參加紙筆測驗的總人數	43		41		45		46		175	
	男	女	男	女	男	女	男	女	男	女
	34	9	31	10	7	38	11	35	83	92

【表 3-1】樣本基本資料



【圖 3-1】研究流程和研究架構

四、研究結果與討論

因爲學生的錯誤可能發生在吸取知識和建構知識的任何環節，並且他們會內化成屬於自己獨一無二的知識，此知識就更具有非一般性和個別化，所以每一種錯誤的產生都應該具有多重因素(郭丁熒，1992)。學生表現在試卷上相同的錯誤答案，並不見得是相同的錯誤原因；而對於訪談後，學生說明的相同錯誤原因，也不一定呈現出相同的錯誤答案或式子，或者表現在不同類型的題目中，導致一種系統性的錯誤概念。本小節利用非結構性的面談記錄對照施測卷中的解題過程，更深入探討學生造成錯誤的因素和思路歷程。

本小節根據測驗中學生的作答方式做統整，找出較具有代表性的錯誤，找其學生來加以面談了解，更詳細分析學生的解題技巧、想法並發現其錯誤的思維及造成錯誤的原因。綜合所有資料，將錯誤一一分析探討，並且呈現出來。

將結果依照矩陣的概念發展及運算過程到如何應用，整理如下表：

概念分類	題號	錯誤人次	錯誤比率%
一、矩陣的意義與概念	二、1	65	37%
二、矩陣的加法與係數積運算	一、1,6	54	15%
三、矩陣乘法的意義與性質	一、3　二、10	60	17%
四、乘法反矩陣和其相關性質	一、2,4,5 二、2,11	227	26%
五、轉移矩陣的應用	一、7　二、3	70	42%
六、二階方陣所對應的平面變換	一、8,9,10 二、4,5,6,7,8,,9,12	632	36%

【表 4-4】矩陣概念錯誤人次、錯誤比率表

二、　矩陣的意義與概念部份：

學生對於矩陣的定義停留在第三冊的高斯消去法，且對矩陣和行列式容易混淆，有不少學生往往忽略基本定義，不清楚主題要表達的意思，所以在日常生活中的實例運用就變得不知如何下手，常常還是用自己熟悉的方式作答，故此部分題目的錯誤還是有偏高的現象，錯誤比率爲 37%。

三、矩陣的加法與係數積運算性質：

這種類型的題目錯誤比率最低，爲 15%，學生普遍認爲這樣的運算規則很自然，和實數系符合，犯錯的原因大部分都是個人的計算錯誤。這幾年學生的計算能力似乎有越來越差的趨勢，需再多觀察留意。

四、矩陣乘法的意義與性質：

對於矩陣的乘法規則，學生常常將對應的元直接相乘，此種錯誤在詢問學生時，學生直覺這樣應該是對的。關於乘法不一定具交換律和消去律的規則，學

生也覺得彆扭，所以在計算方程式或乘法公式時，實數系的解題經驗會干擾而導致錯誤產生。此部分的題型錯誤比率爲 17%，顯示學生大部份可以記住乘法的運算規則。

五、乘法反矩陣和其相關性質：

有些學生對於反矩陣的定義模糊，清楚定義的學生也常常因爲其計算繁瑣而放棄或者計算錯誤。反矩陣的存在性之充要條件學生也一知半解，大部分都是沒有記清楚定義和規則。關於矩陣的冪次方，高中的課程還未提到對角化的名詞，但是題目會以引導的方式讓學生逐步完成對角化，進而算矩陣的n次方，學生對於$n \to \infty$時的矩陣較難掌握。另一種題型是利用反矩陣求未知矩陣，學生一樣比較習慣用假設方式去解聯立方程式，利用反矩陣的觀念要再加強。此部分相關題型的錯誤比率爲 26%，表示學生深入矩陣的特殊運算時，稍感困難。

六、轉移矩陣的應用

高中課程對於轉移矩陣、機率矩陣、馬可夫鏈等相關概念並無深入探討，此部分題型也只在自然組有稍微提到，學生僅憑例題去感覺此種矩陣的應用，所以常常在碰上問題時，無從下手，又因題目的敘述攏長，學生缺乏耐心而空白率頗高，或者勉強湊出混亂的轉移矩陣。較有程度的學生能列出完整的轉移矩陣，但是在求穩定狀態時，概念模糊，這方面仍有待加強。此部分錯誤比率高達 42%，顯示自然組學生對於矩陣在機率問題的應用方面，仍須再多加強。

七、二階方陣所對應的平面變換

此類型題目錯誤比例頗高，主要因素是對平面變換的認知不足，先備知識不夠等等。分成下列幾項分析：

（1）鏡射變換：此類題目學生容易誤以爲是投影變換，在作圖或計算時，以投影的想法作答。

（2）伸縮變換：學生常常在代數變換時，直接乘以伸縮倍數導致錯誤，進而推出錯誤的變換矩陣。

（3）推移變換：此種平面變換，學生最不能掌握，對定義不清楚，常常誤判爲平移，或者在水平推移和鉛直推移上容易混亂，作圖的時候大部分無法描出正確的推移圖形。

（4）旋轉變換：錯誤原因有三角函數的先備知識不足，導致無法正確作答；在旋轉圖形和轉軸上易顛倒；無法熟記旋轉矩陣等等。

此類型的錯誤比率爲 36%，顯示學生在平面變換的理解、應用方面要在多補強，可多多利用實際的作圖和畫圖來讓學生更明白。

研究者對於高三矩陣單元的錯誤類型研究，經過資料的分析探討還有和學生、資深老師做交流，但因爲此課程屬於高三選修課程，學生在面臨大考之際，常常忽略此單元在日後生活上或者經濟、工程、物理等等方面的實際用途，這方面的學習錯誤態度也能讓日後研究者在教學上有所改進。

五、結論與建議

結論

一、　受測學生在矩陣單元的基本概念和應用運算錯誤類型分析：

（3）　矩陣的基本運算

8. 對矩陣的定義模糊不清。
9. 矩陣加減法運算的計算錯誤。
10. 矩陣乘法的運算法則錯誤。
11. 誤以為矩陣乘法都具有交換律。
12. 誤以為矩陣方程式都具有消去律。
13. 誤以為所有矩陣均有反矩陣。
14. 誤以為矩陣的實係數積和行列式的實係數積相同。

（4）　矩陣的應用

6. 和日常生活的經驗結合，利用表格呈現，矩陣行列的混亂。
7. 求矩陣冪次方的對角化錯誤。
8. 機率矩陣、轉移矩陣的應用錯誤。
9. 高斯消去法的計算錯誤。
10. 二階矩陣所代表的平面變換：平移、鏡射、旋轉、伸縮、推移，變換後之圖形和方程式的錯誤。

二、　在「矩陣概念與應用測驗」的受測結果與面談的資料分析出學生的學習困難為下列各項：

（1）　先備知識的不足無法接收新的概念。
（2）　矩陣運算、反矩陣的計算過程繁雜，產生困難。
（3）　對於運算規則和實數系的不同產生困惑。
（4）　對於矩陣的冪次方需可對角化無法理解。
（5）　將矩陣應用於機率問題，列出轉移矩陣的困難、求穩定狀態的觀念不足。
（6）　將二階矩陣應用於平面變換的觀念不足，如旋轉矩陣、推移矩陣、伸縮矩陣較明顯有學習困難。
（7）　無法仔細閱讀圖形來和代數符號連結並推得矩陣。
（8）　邏輯推理訓練太少，無法將題目做仔細的思考。

三、　針對高三社會組和自然組對於矩陣單元的學習狀況之差異做出分析如下：

（1）　在基本的矩陣運算和概念上，兩類組的學生並無學習上的差異，僅僅在計算錯誤方面，自然組的學生較容易犯錯。
（2）　矩陣應用方面的試題自然組的學生明顯較能觸類旁通。

建議

根據本研究對於高三學生矩陣運算與應用的錯誤類型分析探討，研究者提出矩陣運算與應用的教學以及後續研究方向的相關建議如下：

一、矩陣運算與應用的教學建議：

（1）　在正式進入矩陣單元的教學之前，學生對於行列式與高斯消去法解方程式、機

率、平面座標系、直線方程式、圓錐曲線、基本三角函數等等相關先備知識，務求完整純熟，否則對於矩陣之基本運算還有應用均會造成學習困難。

（2） 對於矩陣的基本運算中，與實數系法則不相同的地方要加以強調，並且解釋清楚，多舉反例說明。如矩陣乘法、反矩陣的運算等等，學生強記常常不知所以然，面對題目時計算忘東忘西，導致無法正確被應用。

（3） 讓學生明白矩陣對於解決數學問題有多方面的貢獻，像機率問題，在機率矩陣、轉移矩陣的概念要多多說明，學生不僅能列出轉移矩陣，對於求穩定性還有發展趨勢亦能讓學生產生興趣。

（4） 在二階矩陣所代表的平面變換教學中，要多多利用作圖說明，並將平移、鏡射、旋轉、推移、伸縮五種變換的概念說明清楚，讓學生能夠感覺出變換的意義，再解釋如何利用圖形推得變換的矩陣，進而得到變換後之新方程式。

（5） 在觀察學生作答情形與面談的過程中，發現學生常常在面對不熟悉的問題時，採取放棄或者胡亂作答的態度，不願意花心思和時間多加研究，對於其感覺熟悉的問題又容易計算錯誤，因此在評量時，應多考量學生的心態，題型要多變化，題目力求簡單清楚，文字不要太過攏長，數字不要太繁瑣。

二、對未來相關研究的建議：

（1） 本研究是針對高三學生在矩陣單元的運算與基本應用做錯誤類型的探討，對於其在機率的推廣與平面變換的運動和保値等等更加深入的部份，可以作爲未來研究的主題。

（2） 本研究是針對彰化地區某國立高中三年級的學生做研究，學生程度參差不齊，在研究對象上無法做周嚴性的考量，所以無法做全面性的推論，研究結果因地區性還有學生組別和程度等因素而有所不同，有待進一步研究探討。

（3） 本研究忽略學生的學習成就、學習動機、學習態度、先備知識、是否參與課後輔導、教師的教學方法等等，其是否會影響學生對於本單元的學習狀況、測驗成效，尙待進一步研究分析。

（4） 本研究尙可追蹤對於日後學生學習相關課程是否有影響，產生之錯誤類型是否阻礙日後的學習等等，未來可以作爲研究主題進一步探討。

六、參考文獻

九章出版社（1998）：錯誤辨析。台北市：九章出版社。

王文科(1983)：認知發展理論與教育-皮亞傑理論的應用。台北市：五南圖書公司。

王文科（1983）：皮亞傑的認知發展理論在兒童教育上的應用。國立臺灣師範大學教育研究所博士論文。

王文科譯（John L. Phillips,Jr 著,1981）：皮亞傑理論初階。台北市：國立編譯館出版。

王懷權（2004）：數學的故鄉。台北縣：成信文化事業。

朱建正（2000）：數學領域課程之構想與規劃。翰林文教雜誌第八期。

呂溪木（1983）：從國際科展看我國今後科學教育的發展方向。科學教育月刊，64 期，13－29 頁。

余文卿、李白飛等編著（2000）：高級中學數學甲乙本上下冊。台北縣：龍騰文化。

杜嘉玲（1999）：概念發展---古典論與聯結論。國立中正大學哲學研究所碩士論文。

吳德邦（1988）：我國與美國波士頓市小學數學課程比較研究。國立臺灣師範大學數學研究所碩士論文。

林邦傑（1982）：我國國中及高中學生認知發展之研究。科學教育月刊：51 期,12～22 頁。

林福來、李恭晴等編著（2000）：高級中學數學甲乙本上下冊。台南市：南一書局。

林福來（1986）：平面圖形的變換。台北市：幼獅文化事業。

林福來（1982）：談中學幾何教材。科學教育月刊,46 期,14～22 頁。

林福來（1991），數學的診斷評量。教師天地，第 54 期，頁 32-38。

林碧珍（1988）：國小學生數學解題的表現及其相關因素之研究。國立臺灣師範大學數學研究所碩士論文。

林生傳(1996)。概念教學對概念發展的實驗效果-階次理論模式的概念教學實驗。國立高雄師範大學教育學系教育月刊，12，31-70。

柳賢、左太政等編著（1999）：高級中學數學甲乙本上下冊。台南市：翰林書局。

姚晉雯（2003）：高三學生平移旋轉解題表現及其相關因素之研究。臺灣師範大學數學研究所論文。

胡炳生（1994）：數學解題思維方法。台北市：九章出版社。

姜祖恕（2002）：馬可夫鏈的簡介。數學傳播第九卷第三期。

袁小明（2000）：數學誕生的故事。臺北市：九章出版社。

許志農、陳清風（2004）：轉移矩陣與班佛法則。龍騰文化：數學新天地第九期。

張春興、林清山（1996）：教育心理學。41～42 頁。

張景中（1995）：平面幾何新路。臺北市：九章出版社。

張景中（1995）：數學家的眼光。臺北市：九章出版社。

張素鎔（1987）：初等代數學習困難。科學教育月刊,100 期,23～29 頁。

國立台灣師範大學科學教育中心主編（1999）：高級中學理科數學。台北市：正中書局。

梁宗巨（1998）：數學歷史典故。台北市：九章出版社。

陳澤民譯（Richard R. Skemp 著,1995）：數學學習心理學。台北市：九章出版社。

陳淑敏（1995）。Vygotsky「最近發展區」概念內涵的探討。屏東師院學報，8，503-526

曹亮吉（民 86）：阿草的葫蘆。台北市：遠哲科學教育基金會。
曾憲錠（2004）：推移變換爲什麼叫「推移」。龍騰文化：數學新天地第九期。
葛曉冬（1999）：花蓮地區國小泰雅族學生 van Hiele 幾何思考層次之調查研究。國立花蓮師範學院國小科學教育研究所碩士論文。
揚弢亮（1999）：中學數學教學法通論。台北市：九章出版社。
楊維哲、蔡聰明等編著（1999）：高級中學數學甲乙本上下冊。台北市：三民書局。
趙文敏（1986）：幾何學概論。臺北市：九章出版社。
趙寧（1995）。概念學習的性質－屬性與程序研究。社會教育學刊，24，81-103。
廖亦德（1994）：線性代數綜合剖析。台北市：智勝文化。
歐陽鍾仁（1988） 科學教育概論。台北市：五南圖書出版有限公司。
劉怡蘭（2001）：高雄地區高中生對數運算錯誤類型之研究。國立高雄師範大學數學系碩士班碩士論文。
閻育蘇譯（G.Polya 著）（1999）：怎樣解題。台北市：九章出版社。
鍾聖校（1988）：結構性科學探討的教學理論及應用。國立臺灣師範大學教育研究所博士論文。
戴文賓（1998）：國一學生由算術領域轉入代數領域呈現的學習現象與特徵。彰化師範大學/科學教育研究所碩士論文。
譚寧君（1993）：兒童的幾何觀一從 Van Hiele 幾何思考的發展模式談起。國民教育，33 卷 5.6 期，頁 12-17。
龐之垣（1993）：常用數學解題思維方法。台北市：凡異出版社。
饒見唯（1994）：知識場論。頁 65-114。台北：五南書局。
Schwarzenberger (1984)：錯誤的重要性-- 英國數學學會會長致詞。數學圈，21 期，頁 73-80。

附錄：正式施測試題

一、是非題（對的答○，錯的答×，並將錯誤理由寫出或作訂正）：

【 】1. A、B、C 表示矩陣，設 3A＋4B＝5C，則 B＝ $\frac{5}{4}C-\frac{3}{4}A$。

理由：

【 】2. 設 A 為三階方陣、0 為零矩陣，且 A≠0，則 A 必有反矩陣。

理由：

【 】3. 設 AC、BC 都有意義，則 AC＋BC＝（A＋B）C＝C（A＋B）。

理由：

【 】4. 若 $\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix}A=\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix}B$，且 A、B 皆為二階方陣，則 A＝B。

理由：

【 】5. 設 A、B 為 n 階方陣、0 為零矩陣，若 AB＝0，則推論 A＝0 或 B＝0。

理由：

【 】6. 已知 $A=\begin{bmatrix}3&0&-1\\-1&1&1\\2&4&0\end{bmatrix}$、$B=\begin{bmatrix}1&3&1\\2&1&-4\\-3&0&3\end{bmatrix}$，$A^t+B^t=(A+B)^t$。

理由：

【 】7. 轉移矩陣是一定會收斂的，$B=\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix}$。

理由：

【 】8. 在平面的伸縮變換下，直線仍變成直線，橢圓仍只變成橢圓。

理由：

【 】9. 若 $A=\begin{bmatrix}\cos\theta&-\sin\theta\\\sin\theta&\cos\theta\end{bmatrix}$ 且 $A^2=I$，則 $A=I$。

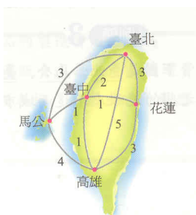
理由：

【 】10. 稱 $(x,y)\to(x+2y,y)$ 為〝推移〞的線性變換？說明你對推移的感覺。

理由：

二、演算題：

1. 右圖是台北、台中、馬公、高雄、花蓮五地之間的航線圖，圖中的兩地之間的數字代表有幾家航空公司飛航於兩地之間，試用表格表示右列航線圖，並寫出它所對應的矩陣。



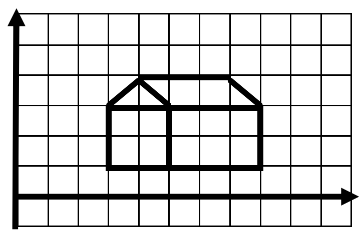
2. 設 $A=\begin{bmatrix}2p-q&-2p+2q\\p-q&-p+2q\end{bmatrix}$、$B=\begin{bmatrix}2&1\\1&1\end{bmatrix}$，$p,q\in R$，試回答下列各問題：(1) 求 $B^{-1}=$？(2) 求 $B^{-1}AB=$？(3) 求 $A^n=$？

3. 某地區有甲、乙、丙三家奶粉供應商，根據調查顯示：甲公司每年保留 60 %的顧客，而轉向乙公司與丙公司訂購的顧客各占 20%；乙公司每年保留 40%的顧客，而轉向甲公司與丙公司訂購的顧客占 40%與 20%；丙公司每年保留 20%的顧客，而轉向甲公司與乙公司訂購的顧客占 60%與 20%。若目前甲、乙、丙三家公司的市場占有率分別為 20%、20%、60%，且顧客總人數不變。

（1）試問三個觀察期之後，這三家公司的預計市場占有率分別為多少？

（2）已知奶粉供應市場會趨於穩定，試問其穩定狀態為何？

4. 座標方格紙上有一房屋圖案，如圖所示。將此圖案沿 x 軸推移 y 座標的 $\frac{1}{2}$ 倍，試畫出新圖案。



x

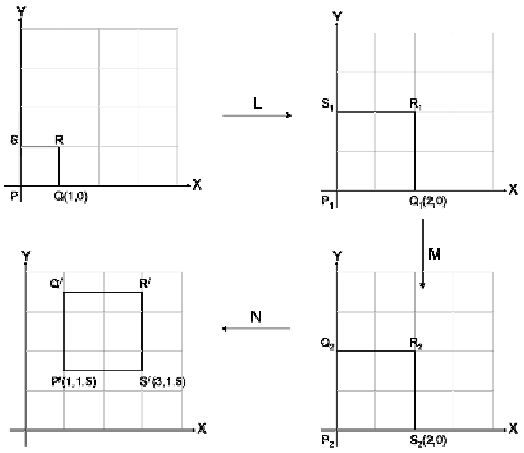
5. 在座標平面中，將橢圓 $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$ 對直線 $x-y=0$ 作鏡射，試畫出新圖形、寫出變換所對應的矩陣並求出方程式。

6. 在座標平面中，將圓 $x^2+y^2=1$ 沿水平方向伸張 2 倍，鉛垂方向壓縮 $\frac{1}{2}$ 倍，試畫出新圖形、寫出變換所對應的矩陣並求出方程式。

7. 在座標平面中，將雙曲線 $x^2-y^2=4$ 沿 y 軸推移 x 軸座標的 3 倍，試畫出新圖形、寫出變換所對應的矩陣並求出方程式。

8. $O(0,0)$、$A(-4,2)$，若 ΔABC 是正三角形，利用旋轉矩陣求 B 點座標。

9. 正方形 $PQRS$ 中，$P(0,0)$、$Q(0,1)$，將 $PQRS$ 經一系列的變換後逐　步的映至 $P'Q'R'S'$，其中經過 L、M、N 三個變換，將 P 映至 P_1，P_1 映至 P_2，P_2 映至 P'，其餘的頂點類推，以下圖表示每個變換的過程：



（1）試分別寫出 L 與 M 兩變換的矩陣表示。

（2）設 L、M、N 三個變換的合成，試求 $\mathrm{T}(x,y)$。

10. 設 A 為 4 階方陣，$\det(A)$ 表示 A 所對應的行列式值，若 $\det(3A)=k\cdot\det(A)$，則 $k=$？

11. $A=\begin{bmatrix}1 & -3 & 2\\ 2 & 1 & -1\\ 5 & -1 & 3\end{bmatrix}$、$B=\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}$，且 $AX=B$，則 $X=$？

（　　）12.若矩陣 $\mathrm{A}=\begin{bmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}$，則下列哪一個正確？ ① A^{-1} 不存在 ② $A^{-1}=A$ ③ $A^{-1}=-A$ ④ $A^{-1}=A^t$ ⑤ $A+A^{-1}=I$ 。