

雙包絡減速機的幾何特徵分析

黃志銘

摘 要

雙包絡減速機在工業上常被廣泛使用。本文藉由掃掠法(Sweeping Method)推導雙包絡蝸桿(Globoidal Worm)曲面方程式，再由螺旋理論(Screw Theory)推導雙包絡蝸輪(Globoidal Worm Gear)嚙合曲面方程式。參考國際設計規範，求出蝸桿和蝸輪曲面的資料點。作為蝸桿蝸輪幾何分析，包括齒形特徵分析，蝸桿蝸輪的曲率分析，並計算雙包絡蝸桿蝸輪的傳動效率。

ABSTRACT

Double-Enveloping Reducers are used widely in various industries. In this study, a procedure is developed to analyze the geometric and kinematic properties of such a rotational reducer. In the mechanism, the globoidal worm profile is derived by using the sweeping method and the profile of the globoidal worm wheel is obtained by employing the screw theory. Based on Standards of the American Gear Manufacturers Association (AGMA 6030-C87), the involved parameters in designing and analyzing the reducer are revealed. Finally, the transmission errors based on tooth the contact analysis (TCA) are also reported.

目 次

- 一、前言
- 二、雙包絡蝸桿蝸輪規範
- 三、曲面方程式
- 四、幾何分析
- 五、結論
- 六、參考文獻

關鍵字：雙包絡減速機、雙包絡蝸桿蝸輪、Globoidal Worm、Globoidal Worm Gear

一、前言

雙包絡減速機(Double-Enveloping Reducer)，國際上亦稱爲 Globoidal Worm Drive 如圖 1-1 所示，常用於動力傳動、旋轉定位等機構。雙包絡減速機主要由蝸桿(Globoidal Worm)與蝸輪(Globoidal Worm Gear)[1]組合而成如圖 1-2 所示，由於其特殊的外形，故具有傳動力大、低噪音、定位精度佳、兩軸互相垂直但不相交等特性[2-5]。

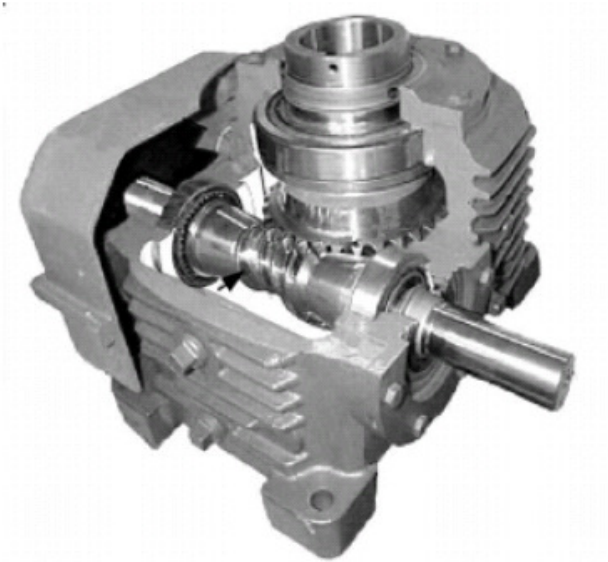


圖 1-1 雙包絡減速機[3]



圖 1-2 雙包絡蝸桿與蝸輪[3]

二、雙包絡蝸桿蝸輪規範

雙包絡蝸桿蝸輪組，兩中心軸在空間既不平行又不相交，且互為 90 度，兩中心軸為交錯軸(Crossed Axes)或稱歪斜軸(Skew Axes)。蝸桿的外形呈內凹形且蝸輪的齒面外形也呈內凹形，蝸桿和蝸輪相互包圍(或稱相互包絡)。

在中心平面(蝸桿軸心線的截面)上，刀具側邊雖可為其他曲線，但最常用的是直線，所以蝸桿齒形是由刀具側邊直線，經掃掠法(Sweeping Method)[29]運算而成的曲面。蝸輪嚙合齒面是經螺旋理論(Screw Theory)[13]運算而成的曲面，蝸桿與蝸輪兩者齒面互為線接觸的曲面[27]。

2-1 雙包絡蝸桿蝸輪部位名稱

雙包絡蝸桿蝸輪的齒形規範是根據多年經驗及使用心得，歸納出最適合的國際共同使用規範。根據美國齒輪製造協會(AGMA6030-C87)[7]，就雙包絡蝸桿蝸輪部位名稱以圖 2-1 和圖 2-2 做說明。

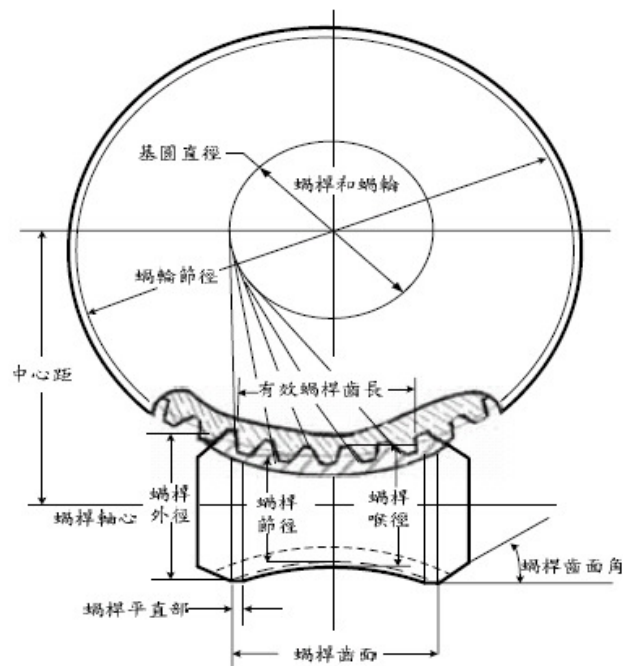


圖 2-1 雙包絡蝸桿蝸輪在中心面的部位名稱[7]

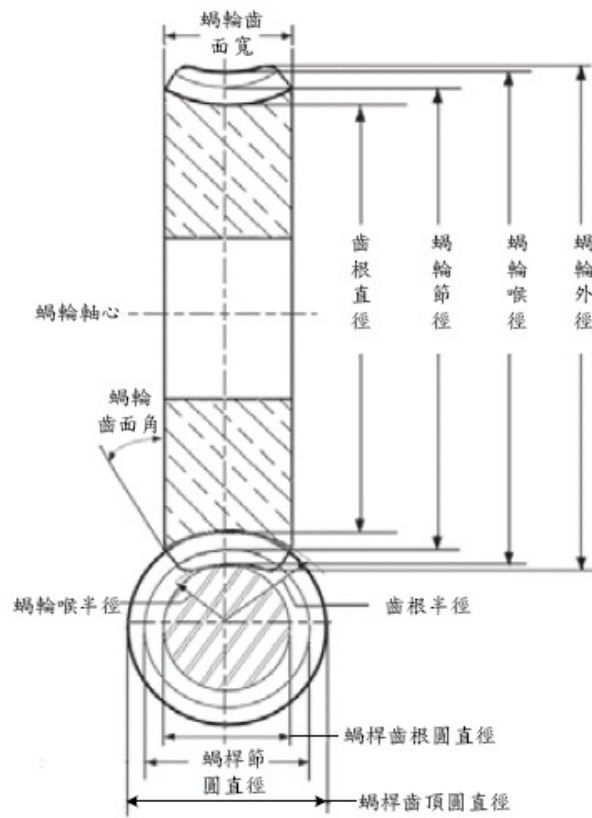


圖 2-2 雙包絡蝸桿蝸輪在垂直面的部位名稱[7]

三、曲面方程式

本文的研究方法是利用掃掠法(Sweeping Method)推導雙包絡蝸桿曲面方程式[29],再由螺旋理論(Screw Theory)[13]推導雙包絡蝸輪嚙合曲面方程式。

3-1 蝸桿曲面方程式

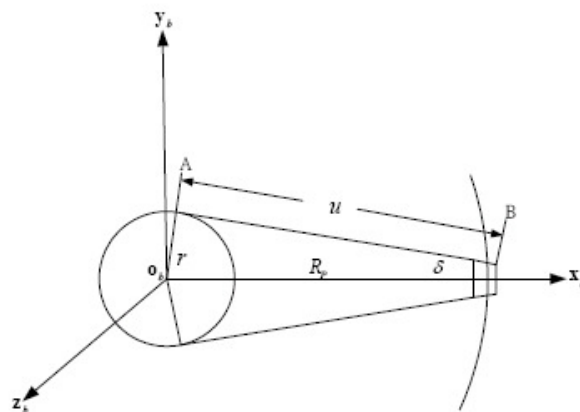


圖 3-1 刀具座

刀具左側直線方程式(刀具在 $x_b z_b$ 平面上，繞 y_b 軸)

$$\mathbf{R}_{bL} = [u \cos \delta + r \sin \delta \quad 0 \quad u \sin \delta - r \cos \delta]^T \quad (3-1)$$

刀具右側直線方程式(刀具在 $x_b z_b$ 平面上，繞 y_b 軸)

$$\mathbf{R}_{bR} = [u \cos \delta + r \sin \delta \quad 0 \quad r \cos \delta - u \sin \delta]^T \quad (3-2)$$

蝸桿左側曲面 \mathbf{R}_{1L}

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_{1L} &= \mathbf{M}_{1b} \mathbf{R}_{bL} \\ \mathbf{R}_{1L} &= \begin{bmatrix} \cos \psi_1 \cos \psi_b & -\sin \psi_1 & -\cos \psi_1 \sin \psi_b & -E_c \cos \psi_1 \\ \sin \psi_1 \cos \psi_b & \cos \psi_1 & -\sin \psi_1 \sin \psi_b & -E_c \sin \psi_1 \\ \sin \psi_b & 0 & \cos \psi_b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \cos \delta + r \sin \delta \\ 0 \\ u \sin \delta - r \cos \delta \\ 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{1L}^{(X)} \\ \mathbf{R}_{1L}^{(Y)} \\ \mathbf{R}_{1L}^{(Z)} \\ 1 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3-3)$$

其中 \mathbf{R}_{1L} 分量爲

$$\mathbf{R}_{1L}^{(X)} = \cos \psi_1 [u \cos(\delta + \psi_b) + r \sin(\delta + \psi_b) - E_c]$$

$$\mathbf{R}_{1L}^{(Y)} = \sin \psi_1 [u \cos(\delta + \psi_b) + r \sin(\delta + \psi_b) - E_c]$$

$$\mathbf{R}_{1L}^{(Z)} = u \sin(\delta + \psi_b) - r \cos(\delta + \psi_b)$$

蝸桿右側曲面 \mathbf{R}_{1R}

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_{1R} &= \mathbf{M}_{1b} \mathbf{R}_{bR} \\ \mathbf{R}_{1R} &= \begin{bmatrix} \cos \psi_1 \cos \psi_b & -\sin \psi_1 & -\cos \psi_1 \sin \psi_b & -E_c \cos \psi_1 \\ \sin \psi_1 \cos \psi_b & \cos \psi_1 & -\sin \psi_1 \sin \psi_b & -E_c \sin \psi_1 \\ \sin \psi_b & 0 & \cos \psi_b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \cos \delta + r \sin \delta \\ 0 \\ r \cos \delta - u \sin \delta \\ 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{1R}^{(X)} \\ \mathbf{R}_{1R}^{(Y)} \\ \mathbf{R}_{1R}^{(Z)} \\ 1 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3-4)$$

其中 \mathbf{R}_{1R} 分量爲

$$\mathbf{R}_{1R}^{(X)} = \cos \psi_1 [u \cos(\delta - \psi_b) + r \sin(\delta - \psi_b) - E_c]$$

$$R_{1R}^{(Y)} = \sin \psi_1 [u \cos(\delta - \psi_b) + r \sin(\delta - \psi_b) - E_c]$$

$$R_{1R}^{(Z)} = -u \sin(\delta - \psi_b) + r \cos(\delta - \psi_b)$$

3-2 蝸輪曲面族方程式

其中蝸輪左側曲面族方程式 R_{2L} 的分量，可表示如下：

$$\begin{aligned} R_{2L}^{(X)} &= u [\cos \theta \cos(\delta + \psi_b) \cos \phi_2 + \sin(\delta + \psi_b) \sin \phi_2] \\ &\quad + r [\cos \theta \sin(\delta + \psi_b) \cos \phi_2 - \cos(\delta + \psi_b) \sin \phi_2] \\ &\quad - E(\cos \theta \cos \phi_2 - \cos \phi_2) \end{aligned} \quad (3-5)$$

$$R_{2L}^{(Y)} = [u \cos(\delta + \psi_b) + r \sin(\delta + \psi_b) - E] \sin \theta \quad (3-5)$$

$$\begin{aligned} R_{2L}^{(Z)} &= u [-\cos \theta \cos(\delta + \psi_b) \sin \phi_2 + \sin(\delta + \psi_b) \cos \phi_2] \\ &\quad - r [\cos \theta \sin(\delta + \psi_b) \sin \phi_2 + \cos(\delta + \psi_b) \cos \phi_2] \\ &\quad + E(\cos \theta \sin \phi_2 - \sin \phi_2) \end{aligned}$$

其中蝸輪右側曲面族方程式 R_{2R} 的分量，可表示如下：

$$\begin{aligned} R_{2R}^{(X)} &= u [\cos \theta \cos(\delta - \psi_b) \cos \phi_2 - \sin(\delta - \psi_b) \sin \phi_2] \\ &\quad + r [\cos \theta \sin(\delta - \psi_b) \cos \phi_2 + \cos(\delta - \psi_b) \sin \phi_2] \\ &\quad - E(\cos \theta \cos \phi_2 - \cos \phi_2) \end{aligned}$$

$$R_{2R}^{(Y)} = [u \cos(\delta - \psi_b) + r \sin(\delta - \psi_b) - E] \sin \theta \quad (3-6)$$

$$\begin{aligned} R_{2R}^{(Z)} &= -u [\cos \theta \cos(\delta - \psi_b) \sin \phi_2 + \sin(\delta - \psi_b) \cos \phi_2] \\ &\quad - r [\cos \theta \sin(\delta - \psi_b) \sin \phi_2 - \cos(\delta - \psi_b) \cos \phi_2] \\ &\quad + E(\cos \theta \sin \phi_2 - \sin \phi_2) \end{aligned} \quad (3-6)$$

3-3 接觸條件方程式

兩嚙合曲面，其法向量垂直兩嚙合曲面的相對速度，亦即法向量和相對速度的內積為零。蝸桿與蝸輪左側曲面的接觸條件方程式

$$\begin{aligned}
S_L &= \mathbf{N}_{1L} \cdot \mathbf{V}_{1L}^{(12)} \\
&= u^2 [(1 - \cos \theta) \cos(\delta + \psi_b) + m_{21} \sin \theta \sin(\delta + \psi_b)] \\
&\quad + ur [(1 - \cos \theta) \sin(\delta + \psi_b) - m_{21} \sin \theta \cos(\delta + \psi_b)] \\
&\quad - uE(1 - \cos \theta)[1 + \cos^2(\delta + \psi_b)] \\
&\quad + E \cos(\delta + \psi_b)(1 - \cos \theta)[E - r \sin(\delta + \psi_b)] \\
&= \sin(\theta/2) \{ u^2 [\sin(\theta/2) \cos(\delta + \psi_b) + m_{21} \cos(\theta/2) \sin(\delta + \psi_b)] \\
&\quad + ur [\sin(\theta/2) \sin(\delta + \psi_b) - m_{21} \cos(\theta/2) \cos(\delta + \psi_b)] \\
&\quad - uE \sin(\theta/2)[1 + \cos^2(\delta + \psi_b)] + E \sin(\theta/2) \cos(\delta + \psi_b)[E - r \sin(\delta + \psi_b)] \} \\
&= 0
\end{aligned} \tag{3-7}$$

蝸桿與蝸輪右側曲面的接觸條件方程式

$$\begin{aligned}
S_R &= \mathbf{N}_{1R} \cdot \mathbf{V}_{1R}^{(12)} \\
&= u^2 [(1 - \cos \theta) \cos(\delta - \psi_b) - m_{21} \sin \theta \sin(\delta - \psi_b)] \\
&\quad + ur [(1 - \cos \theta) \sin(\delta - \psi_b) + m_{21} \sin \theta \cos(\delta - \psi_b)] \\
&\quad - uE(1 - \cos \theta)[1 + \cos^2(\delta - \psi_b)] \\
&\quad + E \cos(\delta - \psi_b)(1 - \cos \theta)[E - r \sin(\delta - \psi_b)] \\
&= \sin(\theta/2) \{ u^2 [\sin(\theta/2) \cos(\delta - \psi_b) - m_{21} \cos(\theta/2) \sin(\delta - \psi_b)] \\
&\quad + ur [\sin(\theta/2) \sin(\delta - \psi_b) + m_{21} \cos(\theta/2) \cos(\delta - \psi_b)] \\
&\quad - uE \sin(\theta/2)[1 + \cos^2(\delta - \psi_b)] + E \sin(\theta/2) \cos(\delta - \psi_b)[E - r \sin(\delta - \psi_b)] \} \\
&= 0
\end{aligned} \tag{3-8}$$

最後將蝸輪左側曲面族方程式(3-5)式，和蝸桿與蝸輪左側曲面接觸條件方程式(3-7)式聯立解，就可得蝸輪左側嚙合曲面方程式。再將蝸輪右側曲面族方程式(3-6)式，和蝸桿與蝸輪右側曲面接觸條件方程式(3-8)式聯立解，就可得蝸輪右側嚙合曲面方程式。

四、幾何分析

4-1 蝸輪齒形特徵

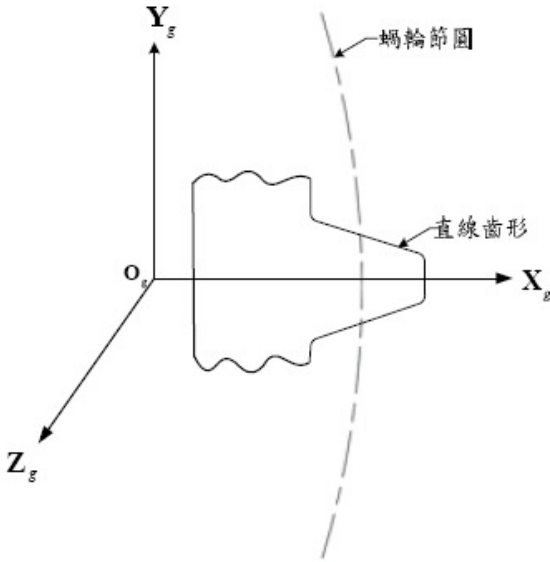


圖 4-1 雙包絡蝸輪在中心平面上的直線齒形

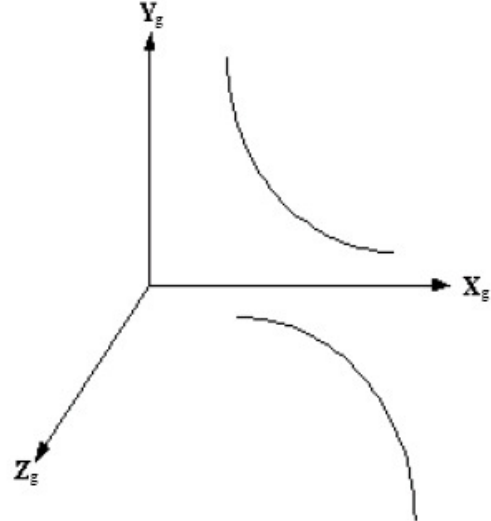


圖 4-2 蝸輪兩邊齒形關係

可知刀具兩側邊直線，只要對 X 軸具有旋轉 180 度關係，經刀具對蝸桿座標轉換矩陣和蝸桿對蝸輪座標轉換矩陣運算後，蝸輪齒形左邊右邊皆是對 X 軸具有旋轉 180 度關係，亦即存在對 Y 軸鏡像，再對 Z 軸鏡像關係如圖 4-2。

4-2 接觸線

接觸線(Contact Line)就是當蝸輪在特定位置時，蝸桿和蝸輪兩曲面接觸點的集合，而兩曲面接觸點必然滿足接觸條件。

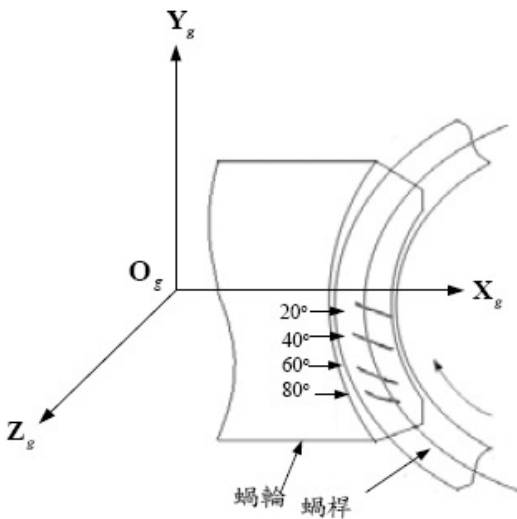


圖 4-3 蝸桿正轉時蝸輪的接觸線

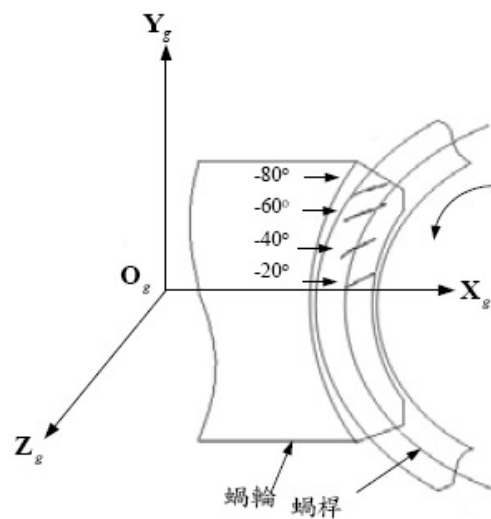


圖 4-4 蝸桿反轉時蝸輪的接觸線

4-3 壓力角、導程角、法向壓力角

壓力角、導程角，法向壓力角，三者是蝸桿和蝸輪幾何特徵的重要因素，其定義及三者間的關係如下：

1. 壓力角(Pressure Angle)，AGMA 定義雙包絡蝸桿蝸輪的壓力角為在中心平面(蝸桿軸心線的截面)上，蝸輪齒形側邊和蝸輪節距(Pitch) (Circular Pitch)之垂直線的夾角 ϕ [7]，如圖 4-5 所示。

2. 導程角(Lead Angle) ，由於雙包絡蝸桿為內凹形，導程角隨蝸桿位置變化而改變，所以 AGMA 定義雙包絡蝸桿的導程角，為蝸桿中心節圓直徑上，蝸桿齒形和蝸桿軸心線之垂直線的夾角 λ_c [7]，如圖 4-6 所示。

導程角 $\lambda_c = \tan^{-1} \frac{D_G}{D_w m_G} \text{ deg}$ 其中 D_G 表示蝸輪節圓直徑， D_w 表示蝸桿節圓直徑， m_G 表示蝸輪齒數和蝸桿紋數的比值。

3. 法向壓力角(Normal Pressure Angle) ，法向壓力角為在垂直齒形的截面上，蝸輪輪齒側邊和齒形方向的夾角 ϕ_n [7]。

4. 如圖 4-6 所示導程角，壓力角，法向壓力角可計算三者的關係式，三者的關係式為

$$\tan \phi = \frac{\tan \phi_n}{\cos \lambda_c} \quad [7] \text{。}$$

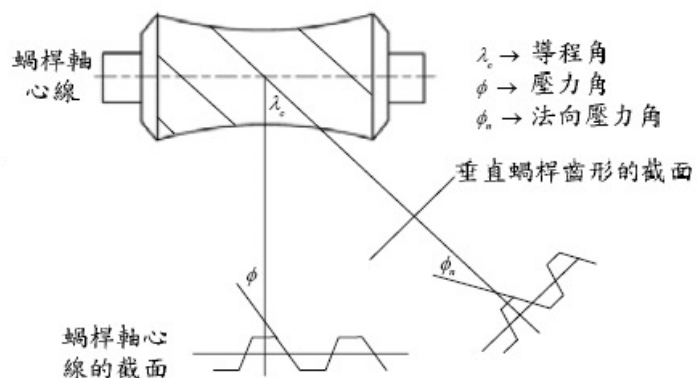
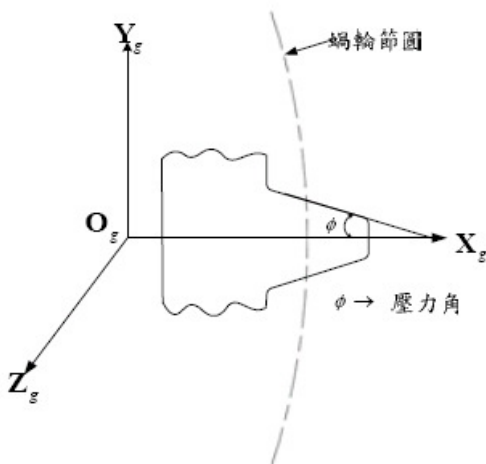


圖 4-5 蝸桿與蝸輪在中心面的部位名稱

圖 4-6 壓力角、導程角，法向壓力角

4-4 蝸輪齒厚

雙包絡蝸桿蝸輪，嚙合傳動時，蝸桿和蝸輪相互包圍或稱相互包絡，可達蝸輪齒數的 $1/8$ ，以蝸輪而言，可包圍的角度是 $360^\circ \times (1/8) = 45^\circ$ ，若蝸輪 30 齒，蝸桿 6 紋，傳動比 $30:6=5:1$ ，相對蝸桿必須旋轉的角度是 $45^\circ \times (5/1) = 225^\circ$ ，所以蝸桿每一螺紋長，至少需要可供旋轉 225° ，一般取 240° 。若蝸輪 30 齒，則每一瞬間，蝸輪有 3~4 齒和蝸桿嚙合，接觸比大，能增加負載能力，減少蝸輪每一單齒的受力。

雙包絡蝸桿蝸輪減速機，蝸桿材料常用硬化處理鋼材，蝸輪常用軟質銅合金如鋁青銅或磷青銅，蝸桿蝸輪傳動過程中，除了上述接觸比大，負載能力大，在蝸桿節徑和蝸輪節徑受限制下(中心距固定)，盡可能增大蝸輪的齒厚，齒厚愈寬則負載強度愈大。

一般而言，蝸輪的齒厚和蝸輪的齒間各佔節距的一半，蝸輪節距 $P_c = \pi D_G / N_G$ ，其中 D_G 為蝸輪節徑， N_G 為蝸輪齒數。工業傳動用雙包絡蝸桿蝸輪，爲了增加蝸輪強度，設計蝸輪齒厚 t_G 佔節距的 55%，即 $t_G = 0.55P_c$ 。爲了比較兩者關係，將蝸輪齒厚佔節距的 50%和蝸輪齒厚佔節距的 55%，計算相關部位尺寸，在蝸桿蝸輪中心距不變，蝸桿紋數和蝸輪齒數不變，得到兩者在中心平面的蝸輪齒形如圖 4-7 所示。

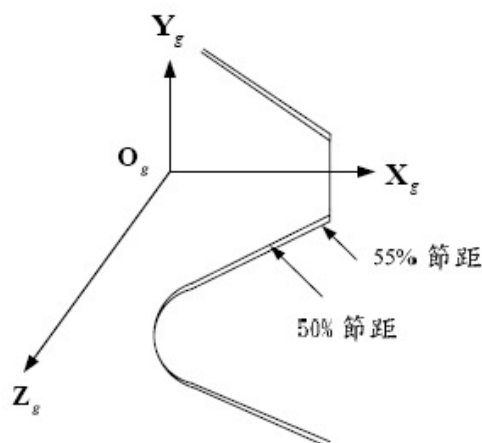


圖 4-7 蝸輪齒厚爲 50%節距和蝸輪齒厚爲 55%節距的比較

4-5 嚙合傳動效率

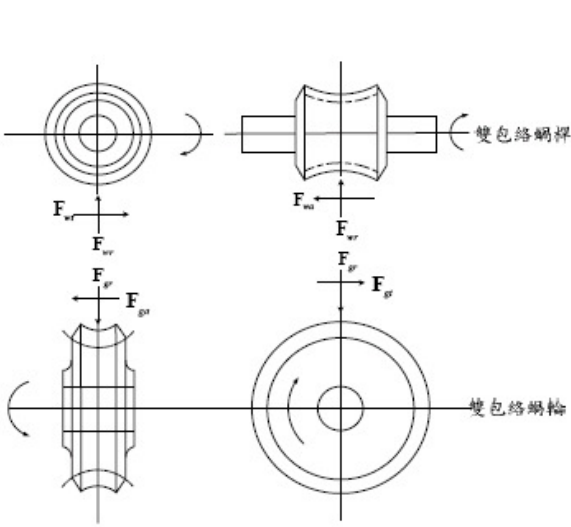


圖 4-8 雙包絡蝸桿蝸輪的受力分析[28]

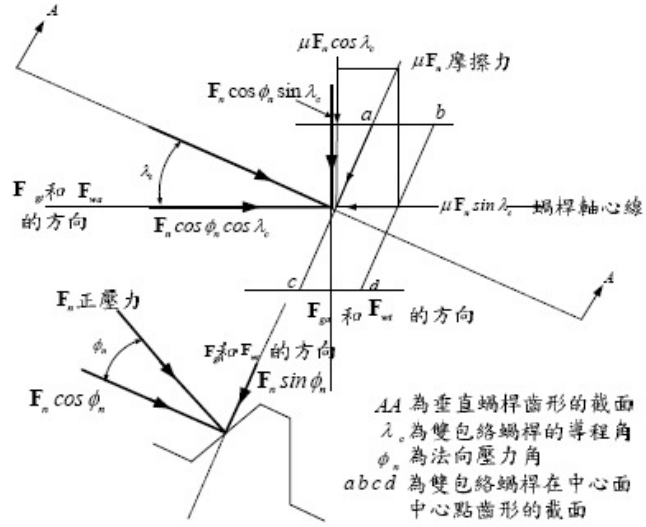


圖 4-9 雙包絡蝸桿垂直截面受力分析[28]

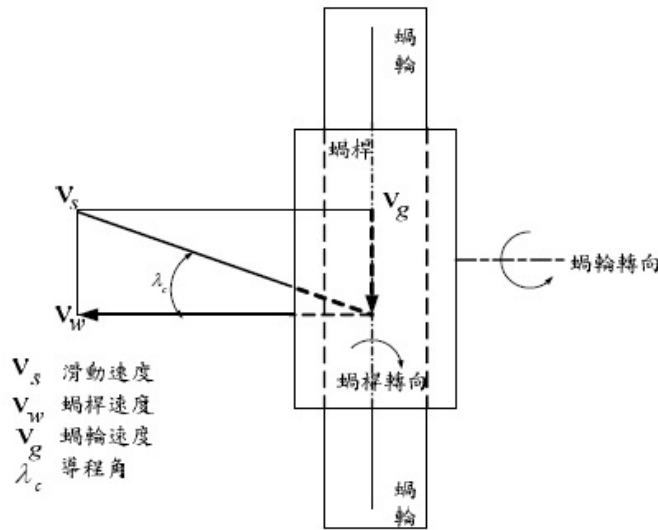


圖 4-10 雙包絡蝸桿蝸輪滑動速度分量分析[28]

雙包絡蝸桿蝸輪的嚙合傳動效率

$$\eta = \frac{F_{gt} V_g}{F_{wt} V_w} = \frac{\cos \phi_n \cos \lambda_c - \mu \sin \lambda_c}{\cos \phi_n \sin \lambda_c + \mu \cos \lambda_c} \tan \lambda_c$$

$$= \frac{\cos \phi_n - \mu \tan \lambda_c}{\cos \phi_n + \mu \cot \lambda_c}$$

4-6 曲率分析

4-6-1 蝸桿曲面的曲率分析

首先將簡單曲面的錐形刀具曲面的主曲率和主方向求出，再利用 Chakraborty[13]的方法求得蝸桿的主曲率和主方向。 σ_{1b} 表示在相切於錐形刀具曲面和蝸桿接觸曲面的平面上兩者主方向的夾角，則可將蝸桿曲面的兩個主曲率 k_{s1} 和 k_{q1} 表示如下：

$$k_{s1} - k_{q1} = \frac{b_{11}^2 - b_{21}^2 + (k_{sb} - k_{qb})b_{31}}{b_{31} \cos 2\sigma_{1b}} \quad (4-1)$$

$$k_{s1} + k_{q1} = k_{sb} + k_{qb} + \frac{b_{11}^2 + b_{21}^2}{b_{31}} \quad (4-2)$$

$$\tan 2\sigma_{1b} = \frac{2b_{11}b_{21}}{b_{11}^2 - b_{21}^2 + (k_{sb} - k_{qb})b_{31}} \quad (4-3)$$

其中

$$b_{11} = [(\omega_f^{(1)} - \omega_f^{(b)}) \times \mathbf{n}_f^{(b)}] \cdot \mathbf{e}_{sb} - k_{sb} (\mathbf{V}_f^{(b1)} \cdot \mathbf{e}_{sb}) \quad (4-4)$$

$$b_{21} = [(\omega_f^{(1)} - \omega_f^{(b)}) \times \mathbf{n}_f^{(b)}] \cdot \mathbf{e}_{qb} - k_{qb} (\mathbf{V}_f^{(b1)} \cdot \mathbf{e}_{qb}) \quad (4-5)$$

$$\begin{aligned} b_{31} = & \mathbf{n}_f^{(b)} \cdot [\omega_f^{(1)} \times (\omega_f^{(b)} \times \mathbf{R}_f^{(b)})] \\ & - \mathbf{n}_f^{(b)} \cdot [\omega_f^{(b)} \times (\omega_f^{(b)} \times \mathbf{R}_f^{(b)})] \\ & + (2\omega_f^{(b)} - \omega_f^{(1)}) \cdot (\mathbf{V}_f^{(b1)} \times \mathbf{n}_f^{(b)}) - k_{sb} (\mathbf{V}_f^{(b1)} \cdot \mathbf{e}_{sb})^2 - k_{qb} (\mathbf{V}_f^{(b1)} \cdot \mathbf{e}_{qb})^2 \end{aligned} \quad (4-6)$$

k_{sb} 和 k_{qb} 表示錐形刀具曲面的主曲率， \mathbf{e}_{sb} 和 \mathbf{e}_{qb} 表示錐形刀具曲面的主方向， $\mathbf{V}_f^{(b1)}$ 表示錐形刀具曲面對蝸桿曲面的相對速度； $\mathbf{R}_f^{(b)}$ 和 $\mathbf{n}_f^{(b)}$ 表示錐形刀具曲面輪廓方程式和其單位法線向量方程式。因此若已知錐形刀具曲面的主曲率 k_{sb} ， k_{qb} 和主方向 \mathbf{e}_{sb} ， \mathbf{e}_{qb} ；而且已知錐形刀具曲面的輪廓方程式 $\mathbf{R}_f^{(b)}$ 和其單位法線向量方程式 $\mathbf{n}_f^{(b)}$ 和錐形刀具曲面對蝸桿曲面的相對速度 $\mathbf{V}_f^{(b1)}$ ，藉由(4-1)式-(4-6)式，可得蝸桿曲面的兩個主曲率 k_{s1} ， k_{q1} 和主方向 \mathbf{e}_{s1} ， \mathbf{e}_{q1} 。

4-6-2 蝸輪曲面的曲率分析

若將蝸桿曲面繼續對蝸輪曲面嚙合傳動， σ_{21} 表示在相切於蝸桿曲面和蝸輪曲面的平面上兩者主方向的夾角。再引用 Chakraborty 和 Dhande 的方法[13]，就可得蝸輪曲面的兩個主曲率 k_{s2} 和 k_{q2} 表示如下：

$$k_{s2} - k_{q2} = \frac{b_{12}^2 - b_{22}^2 + (k_{s1} - k_{q1})b_{32}}{b_{32} \cos 2\sigma_{21}} \quad (4-7)$$

$$k_{s2} + k_{q2} = k_{s1} + k_{q1} + \frac{b_{12}^2 + b_{22}^2}{b_{32}} \quad (4-8)$$

$$\tan 2\sigma_{21} = \frac{2b_{12}b_{22}}{b_{12}^2 - b_{22}^2 + (k_{s1} - k_{q1})b_{32}} \quad (4-9)$$

其中

$$b_{12} = [(\omega_w^{(2)} - \omega_w^{(1)}) \times \mathbf{n}_w^{(1)}] \cdot \mathbf{e}_{s1} - k_{s1} (\mathbf{V}_w^{(12)} \cdot \mathbf{e}_{s1}) \quad (4-10)$$

$$b_{22} = [(\omega_w^{(2)} - \omega_w^{(1)}) \times \mathbf{n}_w^{(1)}] \cdot \mathbf{e}_{q1} - k_{q1} (\mathbf{V}_w^{(12)} \cdot \mathbf{e}_{q1}) \quad (4-11)$$

$$\begin{aligned} b_{32} = & \mathbf{n}_w^{(1)} \cdot [\omega_w^{(2)} \times (\omega_w^{(1)} \times \mathbf{R}_w^{(1)})] \\ & - \mathbf{n}_w^{(1)} \cdot [\omega_w^{(1)} \times (\omega_w^{(1)} \times \mathbf{R}_w^{(1)})] \\ & + (2\omega_w^{(1)} - \omega_w^{(2)}) \cdot (\mathbf{V}_w^{(12)} \times \mathbf{n}_w^{(1)}) - k_{s1} (\mathbf{V}_w^{(12)} \cdot \mathbf{e}_{s1})^2 - k_{q1} (\mathbf{V}_w^{(12)} \cdot \mathbf{e}_{q1})^2 \end{aligned} \quad (4-12)$$

k_{s1} 和 k_{q1} 表示蝸桿曲面的主曲率， \mathbf{e}_{s1} 和 \mathbf{e}_{q1} 表示蝸桿曲面的主方向， $\mathbf{V}_w^{(12)}$ 表示蝸桿曲面對蝸輪曲面的相對速度； $\mathbf{R}_w^{(1)}$ 和 $\mathbf{n}_w^{(1)}$ 表示蝸桿曲面輪廓方程式和其單位法線向量方程式。取用(4-1)式-(4-6)式計算結果，得蝸桿曲面的主曲率 k_{s1} ， k_{q1} 和主方向 \mathbf{e}_{s1} ， \mathbf{e}_{q1} ；而且已知蝸桿曲面的輪廓方程式 $\mathbf{R}_w^{(1)}$ 和其單位法線向量方程式 $\mathbf{n}_w^{(1)}$ 和蝸桿曲面對蝸輪接觸曲面的相對速度 $\mathbf{V}_w^{(12)}$ ，藉由(4-7)式-(4-12)式，可得蝸輪曲面的兩個主曲率 k_{s2} 和 k_{q2} 。

五、結論

本文以座標轉換矩陣運算和接觸條件，推導出雙包絡蝸桿蝸輪的曲面，並依據 AGMA 工業用雙包絡蝸桿蝸輪的設計規範(AGMA 6030-C87)，計算出各部位的實際尺寸，藉由 VB 程式，執行出蝸桿和蝸輪嚙合曲面實際的資料點，作為幾何分析的依據，綜合本文各章節所得的結果，可得以下結論：

- (一)推導出的雙包絡蝸桿與雙包絡蝸輪曲面方程式後，部位尺寸大小，雖可自由設定，但仍要符合標準規範。
- (二)本文以直線為刀具曲線，由掃掠法得到蝸桿曲面，蝸桿曲面兩個主曲率有一個為零。再由螺旋理論得到蝸輪嚙合曲面，蝸輪嚙合曲面兩個主曲率有一個為負值，另一個為正值。
- (三)蝸輪齒形關係

1. 刀具對蝸桿座標轉換矩陣中蝸桿旋轉角度 ψ_1 和蝸桿對蝸輪座標轉換矩陣中蝸桿旋轉角度 ϕ_1 若相等 ($\theta = 0$)，則雙包絡蝸輪左右邊齒形任一點相對 X 軸旋轉 180 度互相對應，即為刀具左右側邊直線值。

2. 刀具對蝸桿座標轉換矩陣中角 ψ_1 和蝸桿對蝸輪座標轉換矩陣中角 ϕ_1 若不相等 ($\theta \neq 0$)，則雙包絡蝸輪左右邊齒形任一點相對刀具對蝸桿座標轉換矩陣中角 $-\psi_1$ 和蝸桿對蝸輪座標轉換矩陣中角 $-\phi_1$ 對 X 軸旋轉 180 度互相對應。
 3. 刀具兩側邊不論直線或曲線，只要刀具兩側邊相對 X 軸具有旋轉 180 度的對應關係，經刀具對蝸桿座標轉換矩陣和蝸桿對蝸輪座標轉換矩陣運算後，蝸輪齒形左邊右邊皆是對 X 軸具有旋轉 180 度關係，亦即存在對 Y 軸鏡像，再對 Z 軸鏡像的關係。
- (四) 蝸桿蝸輪中心距不變，蝸桿紋數和蝸輪齒數不變，增加蝸輪齒厚的方法為捨棄節距均分為齒厚和齒間的方法，改用蝸輪齒厚佔 55% 節距，可得較大的蝸輪齒厚，增大蝸輪強度。
- (五) 接觸傳動時，有兩條接觸線，一條是當(4-24)式 $\sin(\theta/2) = 0$ 成立時，接觸線在中心平面(蝸桿軸心線的截面)，這時的接觸線是通過中心平面的直線；另一條是當(4-24)式 $\sin(\theta/2) \neq 0$ 成立時，所產生的另一條曲線。所以蝸輪的接觸區為蝸輪齒間右外緣至中心平面的區域，和蝸輪齒間左外緣至中心平面的區域。

六、參考文獻

- [1] Crosher, W. P., 2002, Design and Application of The Worm Gear, ASME press., New York., U.S.A.
- [2] 沈頌文, 1980, 齒輪的設計與製造, 徐氏基金會, 台北。
- [3] CONE DRIVE 公司網站 <http://www.textronpt.com>.
- [4] Simon, V., 1993, "Load Distribution in Double Enveloping Worm Gears," ASME Journal of Mechanical Design, vol. 115, pp. 496-501.
- [5] Simon, V., 2003, "Load Distribution in Cylindrical Enveloping Worm Gears," ASME Journal of Mechanical Design, vol. 125, pp. 356-364.
- [6] Tsay, D. M. and Lin, B. J., 1997, "Design and Machining of Globoidal Index Cam," ASME Journal of Manufacturing Science and Engineering, vol. 119, pp. 21-29.
- [7] American National Standard, Design of Industrial Double-Enveloping Worm Gears, ANSI/AGMA 6030-C87.
- [8] Tsay, D. M. and Wei, H. M., 1993, "Design and Machining of Cylindrical Cams with Translating Conical Followers," Computer-Aided Design, vol. 25, No.10, pp. 655-661.
- [9] Tsay, D. M. and Hwang, G. S., 1994, "Application of Theory of Envelope to the Determination of Camoid Profiles with Translating Followers," ASME Journal of Mechanical Design, vol. 116, pp. 320-325.
- [10] Fang, H. S. and Tsay, C. B., 1996, "Mathematical Model and Bearing Contacts of the ZK-type Worm Gear Set Cut by Oversize Hob Cutters," Mechanism and Machine Theory, vol. 31, No.3,

pp. 271-282.

- [11] Bair, B. W. and Tsay, C. B., 1998, "ZK-type Dual-Lead Worm and Worm-Gear Drives: Contact Teeth, Contact Ratio and Kinematic Errors," *ASME Journal of Mechanical Design*, vol. 120, pp. 422-428.
- [12] Fang, H. S. and Tsay, C. B., 1999, "Mathematical Model and Bearing Contacts of the ZN-Type Worm Gear Set Cut by Oversize Hob Cutters," *Tenth World of Congress on the Theory of machines and Mechanisms, Oulu, Proceeding*, pp. 2270-2275.
- [13] Chakraborty, J. and Dhande, S. G., 1977, *Kinematics and Geometry of Planar and Spatial Cam Mechanisms*, John Wiley & Sons Inc., New York., U.S.A.
- [14] Yan, H. S. and Chen, H. H., 1994, "Geometry Design and Machining of Roller Gear Cams with Cylindrical Rollers," *Mechanism and Machine Theory*, vol. 29, No. 6, pp. 803-812.
- [15] Yan, H. S. and Chen, H. H., 1996, "Geometry Design of Globoidal Cams With Generalized Meshing Turret-Rollers," *ASME Journal of Mechanical Design*, vol. 118, pp. 243-249.
- [16] Ishida, K., Ueda, H., Ohashi, S., and Fukui, Y., 1978, "Theoretical and Experimental Investigation of a New Plane Toothed Wheel and Its Enveloping Hourglass Worm," *ASME Journal of Mechanical Design*, vol. 100, pp. 460-469.
- [17] Simon, V., 1998, "Characteristics of a New Type of Cylindrical Worm-Gear Drive," *ASME Journal of Mechanical Design*, vol. 120, pp. 139-146.
- [18] Simon, V., 1989, "A New Type of Ground Double Enveloping Worm Gear Drive," *ASME International Power Transmission and Gearing Conference, Chicago*, pp. 282-288.
- [19] Litvin, F. L. and Chen, V. K., 1992, "Computerized Simulation of Meshing and Bearing Contact for Single-Enveloping Worm-Gear Drives," *ASME Journal of Mechanical Design*, vol. 114, pp. 313-316.
- [20] Seol, I. H., 2000, "The Design, Generation, and Simulation of Meshing of Worm-Gear Drive with Longitudinally Localized Contacts," *ASME Journal of Mechanical Design*, vol. 122, pp. 201-205.
- [21] Greening, J. H., Barlow, R. J., and Loveless, W. G., 1980, "Load Sharing on the Teeth of Double Enveloping Worm Gear," *II International Power Transmissions and Gearing Conference, San Francisco*, Paper No. 80-02/DET-43.
- [22] Simon, V., 1993, "Stress Analysis in Double Enveloping Worm Gears by Finite Element Method," *ASME Journal of Mechanical Design*, vol. 115, pp. 179-185.
- [23] Tsay, D. M. and Ho, H. C., 2001, "Consideration of Manufacturing Parameters in the Design of Grooved Globoidal Cam Indexing Mechanisms," *Proc Instn Mech Engrs* vol. 215, pp. 95-103.
- [24] Tsay, D. M., Ho, H. C., and Wang, K. C., 2001, "Design of Torque Balancing Cams for

- Globoidal Cam Indexing Mechanisms,” ASME Journal of Mechanical Design, vol. 124, pp. 441-447.
- [25] Tsay, D. M., Huang, M. H., and Ho, H. C., 2002, “Producing Follower Motions Through Their Digitized Cam Contours,” Journal of Computing and Information Science in Engineering, vol. 2, pp.98-105.
- [26] Darle W. Dudley, 1984, Handbook of Practical Gear Design, New York, John Wiley & Sons.
- [27] Litvin, F. L., 1994, Gear Geometry and Applied Theory, PTR Prentice Hall , Englewood Cliffs, New Jersey, U. S. A.
- [28] Juvinal, R. C. and Marshek, K. M., 1991, Fundamentals of Machine Component Design, John Wiley & Sons, U. S. A.
- [29] Rogers, D. F. and Adams, J. A., 1990, Mathematical Elements Computer Graphics, McGraw-Hill, New York.
- [30] Stocker, J. J., 1969, Differential Geometry