

離層對連續樑自由振動之影響

蕭樂群、陳俊德

摘要

本文的目的在於分析連續樑之複合疊層樑板中有離層發生時，其自然頻率的影響。所使用的理論為線性結構理論(linear structure theory)，採用的模型為二維連續複合樑，邊界條件為簡單支撐(simply supported)。文中針對兩部份探討：一部份探討無離層且有剪力影響之連續樑的自然頻率與模態；另一部份為有離層之連續等跨距複合樑，探討離層的長度及位置對自然頻率的影響，以 1~3 跨距(span)為主要對象，連續複合樑為等跨距且疊層則為四層之 angle-ply 或 cross-ply。結果顯示：若樑之離層長度、位置一定，單跨距樑之自然頻率降幅比雙跨距者大；而雙跨距樑之自然頻率降幅又比三跨距者大。就厚長比 h/L 剪力對自然頻率之影響而言，三跨距樑受厚長比剪力影響最大，雙跨距樑次之，單跨距樑影響最少。此外，複合樑之疊層為 cross-ply 者比 angle-ply 者之自然頻率更容易受離層所影響。

目次

- 一、緒論
- 二、理論推導
- 三、分析模型
- 四、結果與討論
- 五、結論
- 六、參考文獻
- 七、附錄
- 八、附錄 A

關鍵詞：離層、angle-ply、cross-ply

離層 (delamination)：複合材料以層層疊合之纖維樹脂結合居多，在結合過程或使用時間久遠造成兩層彼此脫離之現象稱圍離層 (delamination)。

angle-ply：複合材料疊層纖維角度各層均為一定角度者。

cross-ply：複合材料疊層纖維角度兩層互為垂直者。

第一章 緒論

關於飛行，雖然在過去數十年中，人類獲得許多寶貴的經驗及突破性的發展，但仍待了解的問題卻比以往更多更複雜了。這是因為飛具(aircraft)的性能不斷提升及其本身具

有的高精密、高安全的性質所致。而飛具對於降低重量、節約能源、提高性能等的強烈要求，使得具有高強度對重量(strength-weight)比、高勁度對重量(stiffness-weight)比、耐熱、耐腐蝕、抗磨耗、及低導熱等性質的複合材料(composite material)被廣泛地使用於機身、機翼、水平及垂直尾翼等主要結構上。雖然複合材料擁有上述之優點，但相對於傳統金屬材料，它也有一些缺點。以目前使用最頻繁的複合材料--複合層板 (composite laminates) 而言。在與纖維平行方向上複合層板的荷載能力很強，然而在垂直纖維方向上承受荷重的能力卻很差。這樣的缺點易使層板內層與層之間彼此分離，造成所謂的離層 (delamination) 現象。因為離層現象大部分發生於複合層板內部，因此往往不易查覺，必須經由非破壞性檢驗方能了解其損壞情形。如：超音波探傷儀(C-Scan)。或者使用壓電材料(piezoelectric material)來局部的克服這種不易察覺的困擾。

離層現象可能肇因於層與層之間的不連續〔1〕，或因為受到靜態載重〔2,3〕、疲勞荷重〔4,5〕，鋸切等機械行為的損害和局部性的壓壞〔6,7〕和製造時〔8,9〕受到外力撞擊〔10,11〕及依需要時所給予之離層〔12,8〕等等因素造成。當離層很短時，會產生局部應力集中，但對於整體結構並無太大影響，然而當離層較長時，會使結構的負載能力降低，易產生局部挫曲，降低自然頻率，嚴重影響結構的安全性，其他有關離層之研究請參閱〔13〕~〔27〕。

本文以能量法所導出包含剪力與慣性矩之公式，並配合傳統複合層板理論推導公式，建立含離層的連續樑模型，以完全解析解(exact solution)之方式來分析有離層的連續樑，因離層而對自然振動頻率及模態之影響，以及探討剪力與旋轉慣性矩在離層樑之厚長比方面的差異。

第二章 理論推導

本章所要探討的是用能量法以及簡化傳統的複合層板理論(classical laminated theory, CLT)，來推導連續樑之控制方程式。

2-1 控制方程式

考慮一長為 L 之非均勻樑 (nonuniform beam) 的橫向振動 (transverse vibration)，其單位長度之質量為 $m(x)$ ，斷面積為 $A(x)$ ，慣性矩為 $I(x)$ ，如下圖：

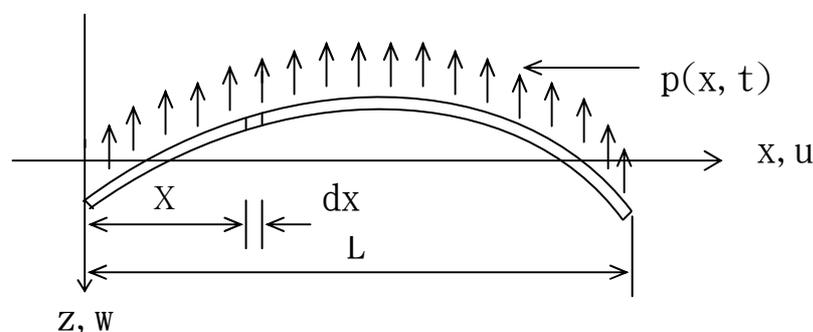


圖 2-1a

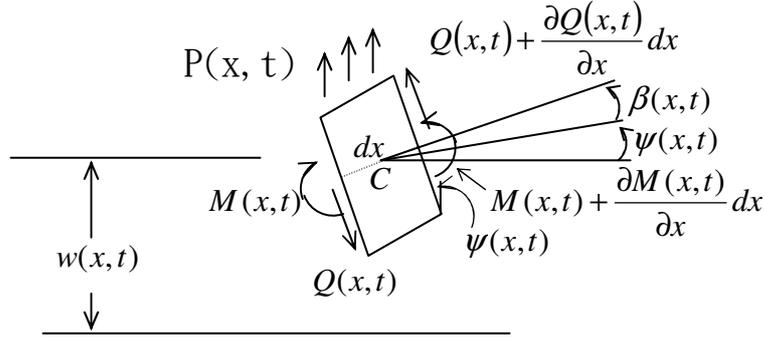


圖 2-1b

若 z 方向之位移為 $w(x,t)$ ，考慮由彎矩(bending)及剪力(shear)所造成效應，則距原點 x 處之位移曲線斜率為

$$\frac{\partial w(x,t)}{\partial x} = \psi(x,t) + \beta(x,t) \quad (2.1)$$

其中 $\psi(x,t)$ 為因彎矩所造成旋轉之角度， $\beta(x,t)$ 為剪力所造成之旋轉量。

彎曲力矩(bending moment) $M(x,t)$ 與彎曲變形(bending deformation)之關係為

$$M(x,t) = EI(x) \frac{\partial \psi(x,t)}{\partial x} \quad (2.2)$$

而剪力 (shearing force) $Q(x,t)$ 與剪力變形(shear deformation)之關係為

其中 G 為剪力模數(shear modulus)， k' 為斷面形狀因子(factor of shape of the cross section)，

$$Q(x,t) = k'GA(x)\beta(x,t) \quad (2.3)$$

其值因斷面形狀之差異而有不同[28]。

上述邊界值問題 (boundary-value problem) 以漢彌爾頓定理(Hamilton Principle)推導之，其公式如下：

$$\int_{t_1}^{t_2} (\delta T + \delta W) dt = 0 \quad (2.4)$$

式中 $T(t)$ 為因移動及轉動之動能， $w(t)$ 為保守與非保守兩部分其為

$$T(t) = \frac{1}{2} \int_0^L \left[\frac{\partial w(x,t)}{\partial t} \right]^2 m(x) dx + \frac{1}{2} \int_0^L \left[\frac{\partial \psi(x,t)}{\partial t} \right]^2 J(x) dx \quad (2.5a)$$

$$\delta W(t) = \delta W_c(t) + \delta W_{nc}(t) = -\delta V(t) + \int_0^L p(x,t) \delta w(x,t) dx \quad (2.5b)$$

$J(x)$ 為質量轉動慣量(mass moment of inertia)，其與慣性矩 $I(x)$ 之關係為：

$$J(x) = \rho_m I(x) = \frac{m(x)}{A(x)} I(x) = r_c^2(x) m(x) \quad (2.6)$$

其中 ρ_m 為質量密度(mass density)， r_c 為對中性軸之迴轉半徑(radius of gyration)。帶入邊界條件並簡化假設樑無外力作用之下自由振動，則 $p(x,t)=0$ ，則 (2.4) 可化簡為：

$$EI \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \rho_m A \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \rho_m I \left(1 + \frac{E}{k'G} \right) \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial t^2} + \frac{\rho_m^2 I}{k'G} \frac{\partial^4 w}{\partial t^4} = 0 \quad (2.17)$$

(2.17)式，即稱為 Timoshenko beam 控制方程式。若不考慮旋轉及剪力效應(the shear and rotatory inertia effects)，則(2.17)式可寫成

$$EI \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \rho_m A \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0 \quad (2.18)$$

稱為 Bernoulli-Euler beam 控制方程式。

2.2 複合樑之推導

若考慮(2.17)式應用在複合樑上，則必須由複合樑板之應力-應變關係、組成方程式、運動方程式等導出複合梁方程式。

假設樑板內厚度第 k 層(lamina)之纖維角度為 θ ，其定義如圖 2.2 所示。軸 1、2 為材料主軸(principal material axis)，軸 1 為纖維方向，軸 2 為垂直纖維方向。在 1-2 座標下，

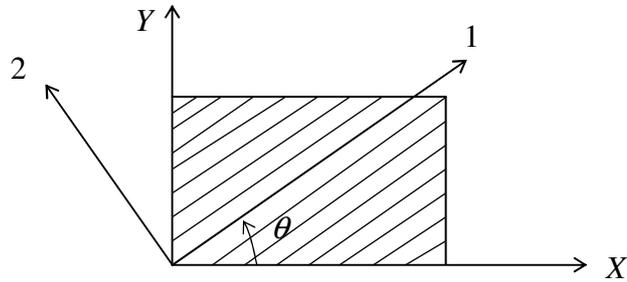


圖 2.2

薄樑板之應力-應變關係遵循虎克定律如下：

其中，

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{Bmatrix}_k = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix}_k \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix}_k \quad (2.21)$$

(2.21)式中之下標 k ，表示第 k 層薄樑板。

$$Q_{11} = \frac{E_1}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} \quad (2.22a)$$

$$Q_{12} = \frac{\nu_{12}E_2}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} \quad (2.22b)$$

$$Q_{22} = \frac{E_2}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} \quad (2.22c)$$

$$Q_{66} = G_{12} \quad (2.22d)$$

經由座標轉換，可得在 x - y 座標系統下之應力-應變關係如下：

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}_k = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix}_k \begin{Bmatrix} \varepsilon_X \\ \varepsilon_Y \\ \gamma_{XY} \end{Bmatrix}_k \quad (2.23)$$

(2.23)式中之 $[\bar{Q}]$ 可參考文獻[29]。

此外，由複合樑板的組成方程式(constitutive equation)：根據力和力矩的定義，對整個樑板之力及力矩可表示為：

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{Bmatrix} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}_k dz \quad (2.24a)$$

$$\begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}_k \cdot z dz \quad (2.24b)$$

(2.24)式中， N_x, N_y, N_{xy} 為層板上每單位長度之合力， M_x, M_y, M_{xy} 為層板上每單位長度之合力矩。若考慮其為複合樑，則其中 $N_y = M_y = 0$ 。今將疊層之定義如圖 2.3：

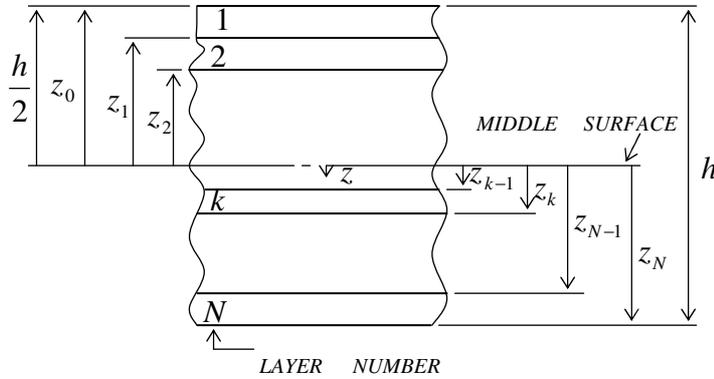


圖 2.3

則(2.24)式可改寫成：

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{Bmatrix} = \sum_{k=1}^N \int_{z_{k-1}}^{z_k} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}_k dz \quad (2.24c)$$

$$\begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \sum_{k=1}^N \int_{z_{k-1}}^{z_k} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}_k \cdot z dz \quad (2.24d)$$

將(2.23)式代入(2.24)式可得：

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} \\ A_{12} & A_{22} & A_{26} \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_x^0 \\ \epsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{Bmatrix} \quad (2.25a)$$

$$\begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_x^0 \\ \epsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ D_{12} & D_{22} & D_{26} \\ D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{Bmatrix} \quad (2.25b)$$

其中

$$A_{ij} = \sum_{k=1}^N (\bar{Q}_{ij})(Z_k - Z_{k-1}) \quad (2.26a)$$

$$B_{ij} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N (\bar{Q}_{ij})(Z_k^2 - Z_{k-1}^2) \quad (2.26b)$$

$$D_{ij} = \frac{1}{3} \sum_{k=1}^N (\bar{Q}_{ij})(Z_k^3 - Z_{k-1}^3) \quad (2.26c)$$

(2.26)式中之 A_{ij} 稱爲拉伸勁度(extensional stiffness)

B_{ij} 稱爲偶合勁度(coupling stiffness)

D_{ij} 稱爲彎矩勁度(bending stiffness)

最後，由層板之運動方程式中，經由平衡方程式可推得受外力作用時，其在 x, y, z 方向上的運動方程式如下[35]：

$$\frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} = \rho_1 \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} + H \frac{\partial^2 \psi_x}{\partial t^2} \quad (2.27a)$$

$$\frac{\partial N_y}{\partial y} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} = \rho_1 \frac{\partial^2 v_0}{\partial t^2} + H \frac{\partial^2 \psi_x}{\partial t^2} \quad (2.27b)$$

$$\frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} - Q_x = H \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} + I_1 \frac{\partial^2 \psi_x}{\partial t^2} \quad (2.27c)$$

$$\frac{\partial M_y}{\partial y} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} - Q_y = H \frac{\partial^2 v_0}{\partial t^2} + I_1 \frac{\partial^2 \psi_x}{\partial t^2} \quad (2.27d)$$

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} + N_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2N_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + N_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = \rho_1 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \quad (2.27e)$$

其中

$$(\rho_1, H) = \int_{-h/2}^{h/2} \rho_m(1, z) dz$$

$$I_1 = \int_{-h/2}^{h/2} \rho_m z^2 dz$$

(2.27)式中， u_0 、 v_0 、 w 分別表示 x 、 y 、 z 方向之位移， ψ_x 、 ψ_y 分別表示 x 及 y 方向層板中立面之斜率。取樑板斷面積 A 爲一單位寬與樑板的厚度 h 之乘積； ρ_m 表示樑板的密度； t 代表時間。將(2.25)式代入(2.27)式，再考慮二維情形，即考慮 $\frac{\partial}{\partial y} = 0$ 、 $v_0 = 0$ 及 $\psi_y = 0$ ；

並忽略 x 方向之加速度，即令 $\frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} = 0$ 。若樑爲自由振動，則(2.27)式簡化可得到以變位表示的複合樑運動方程式。

$$\left(D_{11} - \frac{B_{11}^2}{A_{11}} \right) \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \rho_m h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \left[\left(D_{11} - \frac{B_{11}^2}{A_{11}} \right) \frac{\rho_m}{k'G} + \rho_m I \right] \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial t^2} + \frac{\rho_m^2 I}{k'G} \frac{\partial^4 w}{\partial t^4} = 0 \quad (2.28)$$

若樑層板之堆疊(stacking sequence)屬對稱型態，則 $B_{11} = 0$ ，而(2.28)式則變成：

$$D_{11} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \rho_m h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \rho_m I \left(1 + \frac{E}{k'G} \right) \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial t^2} + \frac{\rho_m^2 I}{k'G} \frac{\partial^4 w}{\partial t^4} = 0 \quad (2.29)$$

(2.29)式中之 D_{11} 為單軸向樑之彎矩勁度， I 為單軸向複合樑對中性軸之慣性矩，(2.29)中之 D_{11} 與 EI 在單軸向之意義是相等的。

第三章 分析模型

3-1 基本假設

考慮一含有 n 個跨距之二維複合材料連續樑，如圖 3-1(a)所示，其中第 i 跨距之樑含有離層長度為 \bar{d} ，離層中心點與左端支點距離為 \bar{c} ，離層距離頂板面為 h_{i2} ；含離層樑之跨距長度為 L_i ，厚度為 h_i ，單位質量密度為 ρ_m ；邊界條為簡支撐。如下圖 3-1(b)所示。

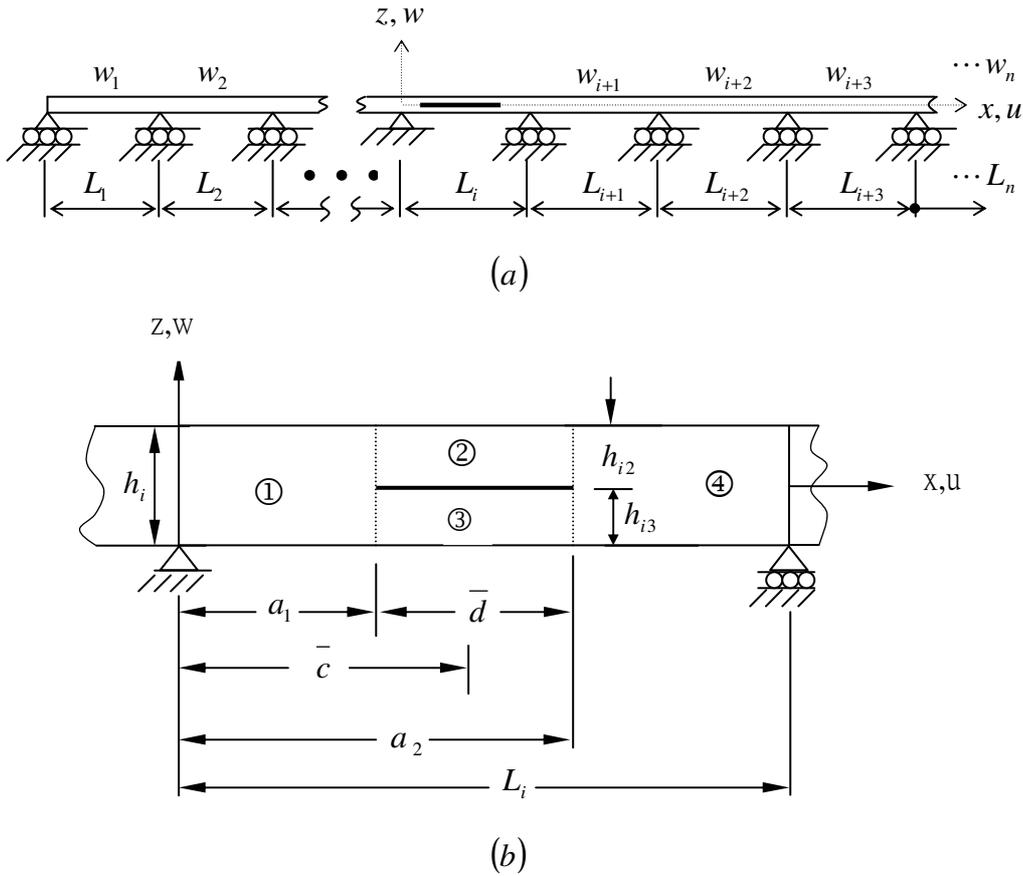


圖 3-1

一、無離層部分連續樑之控制方程式為：

$$D_k \frac{\partial^4 w_k}{\partial x^4} + \rho_m h_k \frac{\partial^2 w_k}{\partial t^2} - \rho_m I_k \left(1 + \frac{E}{k'G} \right) \frac{\partial^4 w_k}{\partial x^2 \partial t^2} + \frac{\rho_m^2 I_k}{k'G} \frac{\partial^4 w_k}{\partial t^4} = 0 \quad (3.1)$$

其中 $k=1,2,3,\dots,i-1,i+1,i+2,\dots,n$ ，為連續樑沒有離層第 k 跨距(span)的編號。

二、有離層樑板則分成四個部分，分別以 $i1, i2, i3, i4$ 表示之，由式(2.17)、(2.18)及圖 3.1(b)，可知這四個部分的控制方程式分別為：

$$D_{i1} \frac{\partial^4 w_{i1}}{\partial x^4} + \rho_m h_{i1} \frac{\partial^2 w_{i1}}{\partial t^2} - \rho I_{i1} \left(1 + \frac{E}{k'G} \right) \frac{\partial^4 w_{i1}}{\partial x^2 \partial t^2} + \frac{\rho_m^2 I_{i1}}{k'G} \frac{\partial^4 w_{i1}}{\partial t^4} = 0 \quad (3.2a)$$

$$D_{i2} \frac{\partial^4 w_{i2}}{\partial x^4} + \rho_m h_{i2} \frac{\partial^2 w_{i2}}{\partial t^2} - \rho I_{i2} \left(1 + \frac{E}{k'G} \right) \frac{\partial^4 w_{i2}}{\partial x^2 \partial t^2} + \frac{\rho_m^2 I_{i2}}{k'G} \frac{\partial^4 w_{i2}}{\partial t^4} + F = 0 \quad (3.2b)$$

$$D_{i3} \frac{\partial^4 w_{i3}}{\partial x^4} + \rho_m h_{i3} \frac{\partial^2 w_{i3}}{\partial t^2} - \rho_m I_{i3} \left(1 + \frac{E}{k'G}\right) \frac{\partial^4 w_{i3}}{\partial x^2 \partial t^2} + \frac{\rho_m^2 I_{i3}}{k'G} \frac{\partial^4 w_{i3}}{\partial t^4} - F = 0 \quad (3.2c)$$

$$D_{i4} \frac{\partial^4 w_{i4}}{\partial x^4} + \rho_m h_{i4} \frac{\partial^2 w_{i4}}{\partial t^2} - \rho_m I_{i4} \left(1 + \frac{E}{k'G}\right) \frac{\partial^4 w_{i4}}{\partial x^2 \partial t^2} + \frac{\rho_m^2 I_{i4}}{k'G} \frac{\partial^4 w_{i4}}{\partial t^4} = 0 \quad (3.2d)$$

$$\frac{\partial P_{i2}}{\partial x} = A_{i2} \frac{\partial^2 u_{i2}}{\partial x^2} = 0 \quad (3.2e)$$

$$\frac{\partial P_{i3}}{\partial x} = A_{i3} \frac{\partial^2 u_{i3}}{\partial x^2} = 0 \quad (3.2f)$$

其中 P_{i2}, P_{i3} 為樑板因離層誘生之力； $D_n(n=i1, i2, i3, i4)$ 為各部分之彎曲勁度； $A_n(n=i2, i3)$ 為離層段之拉伸勁度； F 則為第 $i2$ 和第 $i3$ 部分間的接觸力(contact force)。

由於第 $i2$ 和第 $i3$ 部分間的接觸現象使得(3.2)式呈現高度非線性的性質。為了避免此種困擾，本文假設離層位於樑之中性平面上，亦即 $h_{i2} = h_{i3}$ ，如此則離層上下面將為同步振動(vibrate together)，亦即在運動過程中此二部分不會發生接觸行為。根據上述的假設，(3.2)式可化簡成：

$$D_{i1} \frac{\partial^4 w_{i1}}{\partial x^4} + \rho_m h_{i1} \frac{\partial^2 w_{i1}}{\partial t^2} - \rho_m I_{i1} \left(1 + \frac{E}{k'G}\right) \frac{\partial^4 w_{i1}}{\partial x^2 \partial t^2} + \frac{\rho_m^2 I_{i1}}{k'G} \frac{\partial^4 w_{i1}}{\partial t^4} = 0 \quad (3.3a)$$

$$(D_{i2} + D_{i3}) \frac{\partial^4 w_{i2}}{\partial x^4} + \rho_m (h_{i2} + h_{i3}) \frac{\partial^2 w_{i2}}{\partial t^2} - \rho_m (I_{i2} + I_{i3}) \left(1 + \frac{E}{k'G}\right) \frac{\partial^4 w_{i2}}{\partial x^2 \partial t^2} + \frac{\rho_m^2}{k'G} (I_{i2} + I_{i3}) \frac{\partial^4 w_{i2}}{\partial t^4} = 0 \quad (3.3b)$$

$$D_{i4} \frac{\partial^4 w_{i4}}{\partial x^4} + \rho_m h_{i4} \frac{\partial^2 w_{i4}}{\partial t^2} - \rho_m I_{i4} \left(1 + \frac{E}{k'G}\right) \frac{\partial^4 w_{i4}}{\partial x^2 \partial t^2} + \frac{\rho_m^2 I_{i4}}{k'G} \frac{\partial^4 w_{i4}}{\partial t^4} = 0 \quad (3.3c)$$

$$\frac{\partial P_{i2}}{\partial x} = A_2 \frac{\partial^2 u_{i2}}{\partial x^2} = 0 \quad (3.3d)$$

$$\frac{\partial P_{i3}}{\partial x} = A_3 \frac{\partial^2 u_{i3}}{\partial x^2} = 0 \quad (3.3e)$$

3.2 簡化控制方程式

假設層板每一部分之位移俱為時間的調和函數(harmonic function)，即假設：

$$w_n(x, t) = \bar{w}_n(x) e^{i\omega t} \quad (3.4a)$$

$$u_n(x, t) = \bar{u}_n(x) e^{i\omega t} \quad (3.4b)$$

並且爲了便於處理，在此引進下列無因次參數

$$\begin{aligned}
W_n &= \bar{w}_n / h & U_n &= \bar{u}_n / h \\
\xi &= x / L_i & c &= \bar{c} / L_i \\
d &= \bar{d} / L_i & s_1 &= a_1 / L_i \\
s_2 &= a_2 / L_i & k &= \omega / \omega_0 \\
D &= D_{i1} = D_{i4} = D_n & \bar{D} &= \frac{D_{i2} + D_{i3}}{D} \\
D_n &= EI_n & \omega_0 &= \pi^2 \sqrt{\frac{D}{\rho_m h L_i^4}} \\
h &= h_{i1} = h_{i4} = h_n & I &= I_{i1} = I_{i4} = I_n
\end{aligned} \tag{3.5}$$

則連續樑無離層部分(3.1)式可寫成

$$\frac{\partial^4 W_k}{\partial \xi^4} - \pi^4 \frac{r^2}{h L_i^4} \left(I + \frac{D}{k'G} \right) \frac{\partial^2 W_k}{\partial \xi^2} + \left(-\frac{\pi^4}{L_i^4} r^2 + \frac{D}{k'G} \frac{\pi^8}{L_i^8} \frac{I}{h^2} r^4 \right) W_k = 0$$

$$k = 1, 2, \dots, i-1, i+1, i+2, i+4, \dots \tag{3.6a}$$

有離層部分(3.3)式可寫成：

$$\frac{\partial^4 W_{i1}}{\partial \xi^4} - \pi^4 \frac{r^2}{h L_i^4} \left(I + \frac{D}{k'G} \right) \frac{\partial^2 W_{i1}}{\partial \xi^2} + \left(-\frac{\pi^4}{L_i^4} r^2 + \frac{D}{k'G} \frac{\pi^8}{L_i^8} \frac{I}{h^2} r^4 \right) W_{i1} = 0 \tag{3.6b}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^4 W_{i2}}{\partial \xi^4} - \pi^4 \frac{EI}{h} \frac{r^2}{L_i^4} \left(\frac{I_{i2} + I_{i3}}{A} + \frac{1}{k'G} \right) \frac{\partial^2 W_{i2}}{\partial \xi^2} + \\
\left(-\pi^4 \frac{EI}{A} \frac{r^2}{L_i^4} + \pi^8 \frac{E^2 I^2}{A} \frac{(I_{i2} + I_{i3})}{h^2 k'G} \frac{r^4}{D L_i^8} \right) W_{i2} = 0
\end{aligned} \tag{3.6c}$$

$$\frac{\partial^4 W_{i4}}{\partial \xi^4} - \pi^4 \frac{r^2}{h L_i^4} \left(I + \frac{D}{k'G} \right) \frac{\partial^2 W_{i4}}{\partial \xi^2} + \left(-\frac{\pi^4}{L_i^4} r^2 + \frac{D}{k'G} \frac{\pi^8}{L_i^8} \frac{I}{h^2} r^4 \right) W_{i4} = 0 \tag{3.6d}$$

$$\frac{\partial^2 \bar{U}_{i2}}{\partial \xi^2} = 0 \tag{3.6e}$$

$$\frac{\partial^2 \bar{U}_{i3}}{\partial \xi^2} = 0 \tag{3.6f}$$

其中 $\bar{A} = D_{i2} + D_{i3} - \frac{B_{i2}^2}{A_{i2}} - \frac{B_{i3}^2}{A_{i3}}$ 。 (3.6)式爲一組常微分方程式(ordinary differential equation)，

其解的形式如下：

$$W_n = \sum_{j=1}^4 C_{ij} e^{b_{jn} \xi} \quad n = 1, 2, \dots, i-1, i1, i2, i4, i+1, i+2, \dots \tag{3.7a}$$

$$\bar{U}_n = B_{n0} + B_{n1} \xi \quad n = i2, i3 \tag{3.7b}$$

b_{jn} 為多項式的根。將(3.7)式代入(3.6)式，可得

$$b_{jn}^4 - \frac{(I + Dq)}{h} Z b_{jn}^2 + \left(-Z + q \frac{D}{h^2} Z^2 \right) = 0$$

$$n = 1, 2 \dots i-1, i1, i4, i+1, i+2 \dots \quad (3.8a)$$

$$b_{jn}^4 - \frac{EI}{h} \left(\frac{I_{i2} + I_{i3}}{A} + q \right) Z b_{jn}^2 + \frac{EI}{A} \left(-Z + q(I_{i+2} + I_{i+3}) \frac{EI}{h^2} Z^2 \right) = 0$$

$$n = i2, i3 \quad (3.8b)$$

其中，

$$q = \frac{1}{k'G} \quad (3.8c)$$

$$Z = \frac{\pi^4}{L_i^4} r^2 \quad (3.8d)$$

(3.8d) 式中 r 稱為無因次特徵值(nondimensional eigenvalue)。 (3.7) 式中包含 $4n+8$ 個未知數，因此必須找出 $4n+8$ 個邊界條件或連續條件方能有解；而連續樑中每增加一個跨距(span)則增加四個邊界條件。

3.3 邊界條件及連續條件

首先討論無離層連續樑通式寫法為：(以第 k 跨距為例)：

$$w_k(L_k) = 0 \quad (3.9a)$$

$$w_{k+1}(0) = 0 \quad (3.9b)$$

$$\frac{\partial w_k(L_k)}{\partial x} = \frac{\partial w_{k+1}(0)}{\partial x} \quad (3.9c)$$

$$\frac{\partial^2 w_k(L_k)}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 w_{k+1}(0)}{\partial x^2} \quad (3.9d)$$

其中 $k = 1, 2, 3 \dots i-1, i+1, i+2 \dots$ ， L_k 為第 k 段跨距長。

其次討論含離層簡支撐之邊界條件四個及層板各部分的連續條件八個，共 12 個方程式。如下所示：

(一) 簡單支撐之邊界條件：

$$x = 0$$

$$w_{i1}(0) = 0 \quad (3.9e)$$

$$x = L_i$$

$$w_{i4}(0) = 0 \quad (3.9f)$$

(二) 運動連續條件：

$$x = a_1 \quad w_{i1}(a_1) = w_{i2}(a_1) \quad (3.9g)$$

$$\frac{\partial w_{i1}(a_1)}{\partial x} = \frac{\partial w_{i2}(a_1)}{\partial x} \quad (3.9h)$$

$$u_{i2}(a_1) = -\frac{h_{i3}}{2} \frac{\partial w_{i1}(a_1)}{\partial x} \quad (3.9i)$$

$$u_{i3}(a_1) = \frac{h_{i2}}{2} \frac{\partial w_{i1}(a_1)}{\partial x} \quad (3.9j)$$

$$x = a_2$$

$$w_{i2}(a_2) = w_{i4}(a_2) \quad (3.9k)$$

$$\frac{\partial w_{i2}(a_2)}{\partial x} = \frac{\partial w_{i4}(a_2)}{\partial x} \quad (3.9l)$$

$$u_{i2}(a_2) = u_{i3}(a_2) - \frac{h}{2} \frac{\partial w_{i4}(a_2)}{\partial x} \quad (3.9m)$$

(三) 彎矩與剪力之連續條件：

$$x = a_1$$

$$V_{i1}(a_1) = V_{i2}(a_1) + V_{i3}(a_1) \quad (3.9n)$$

$$M_{i1}(a_1) = M_{i2}(a_1) + M_{i3}(a_1) + \frac{P_{i3}h_{i2}}{2} - \frac{P_{i3}h_{i2}}{2} \quad (3.9o)$$

$$P_{i2}(a_1) + P_{i3}(a_1) = 0 \quad (3.9p)$$

$$x = a_2$$

$$V_{i4}(a_2) = V_{i2}(a_2) + V_{i3}(a_2) \quad (3.9q)$$

$$M_{i4}(a_2) = M_{i2}(a_2) + M_{i3}(a_2) + \frac{P_{i3}h_{i2}}{2} - \frac{P_{i2}h_{i3}}{2} \quad (3.9r)$$

在有離層簡單支撐交界支座部份，如圖 3.1 所示，必須滿足下列邊界條件：

$$x = 0$$

$$\frac{\partial^2 w_{i4}(L_i)}{\partial x} = \frac{\partial^2 w_{i+1}(L_i)}{\partial x} \quad (3.9s)$$

$$x = L_i$$

$$\frac{\partial^2 w_{i1}(0)}{\partial x} = \frac{\partial^2 w_{i-1}(0)}{\partial x} \quad (3.9t)$$

若只考慮單一離層簡支樑，則兩端點支撐之彎矩為零。即(3.9s)式及(3.9t)式之等號右邊為零。如果離層樑之左端或右端為非連續時，其邊界條件則改成彎矩為零，即(3.9s)式或(3.9t)式之等號右邊為零。將(3.7)式代入(3.9)式，得到 $4n+12$ 個含有 C_{jn} 和 B_{nk} 待定係數之線性齊性方程式(linear homogeneous equation)。其中 n 表跨距的數目。藉消去四個係數 B_{n0}, B_{n1} ($n = i2, i3$) 可得到 $(4n+8) \times (4n+8)$ 之線性齊性方程組。以矩陣的形式表示如下：

$$[K]_{(n+8) \times (n+8)} \{q\}_{(n+8) \times 1} = \{0\}_{(n+8) \times 1} \quad (3.10)$$

其中， $[K]$ 表示係數矩陣，其內容前 12×12 部份較為複雜列於附錄 A 中。 $\{q\}$ 為包含 $4n+8$ 個未知數的行向量(column vector)。這 $4n+8$ 個未知數分別為：

$$C_{11}, C_{21}, C_{31}, C_{41}, C_{12}, C_{22}, C_{32}, C_{42}, C_{14}, C_{24}, C_{34}, C_{44}, C_{15}, C_{25}, C_{35}, C_{45}, C_{16}, C_{26}, C_{36}, C_{46} \dots C_{1n}, C_{2n}, C_{3n}, C_{4n}。$$

(3.10)式中為 n 個跨距(span)有離層之樑，加上邊界及連續條件所得到的線性齊性方程組。為了使(3.10)式的解有意義， $[K]$ 矩陣的行列式值(determinant)必須為零。如此便得到了一個特徵方程式(characteristic equation)。其函數形式如下：

$$H(h, I, q, Z) = 0 \quad (3.11)$$

3.4 求解的步驟

(3.8)式中，為計算方便其可改寫為：

$$b_{jn}^4 - y b_{jn}^2 + x = 0 \quad (3.12a)$$

$$\bar{b}_{jn}^4 - \bar{y} \bar{b}_{jn}^2 + \bar{x} = 0 \quad (3.12b)$$

其中 $y = -\frac{(I + Dq)}{h} Z_i$ ，

$$x = -Z_i + q \frac{D^2}{h^2} Z_i^2$$

$$\bar{y} = -\frac{D}{h} \left(\frac{I_{i+2} + I_{i+3}}{A} + q \right) Z_i$$

$$\bar{x} = \frac{D}{A} \left[-Z_i + q(I_{i+2} + I_{i+3}) \frac{D}{h^2} Z_i^2 \right]$$

$i = 1, 2, 3 \dots$ 為特徵值個數。

故(3.12)式的解為：

$$b_{jn} = \left(\frac{y \pm \sqrt{y^2 - 4x}}{2} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (3.13a)$$

$$\bar{b}_{jn} = \left(\frac{\bar{y} \pm \sqrt{\bar{y}^2 - 4\bar{x}}}{2} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (3.13b)$$

由(3.13a)式及(3.13b)式可求(3.8a)式及(3.8b)式中的八個根，最後將這八個根和(3.8d)給定的Z值一起代入(3.11)，以二分法求取其根，即Z值，再回代(3.8d)可求得正向化頻率(normalize frequency)。即求其矩陣特徵值與其相對應之特徵向量，同時可得樑之模態(natural modes)。本文求解所使用的方法乃為完全解(exact solution)，並非一般的模態解(modal solution)，故沒有收斂(convergence)的問題產生。所得結果與 Tracy[27]、Shuau[28] 及 Daniel J. Gorman[34]符合。

第四章 結果與討論

由於離層對複合連續樑的自然頻率有很大影響，因此本章將分別討論連續複合樑頻譜(frequency spectrum)、模態(mode shape)，以及離層之長度和位置、及剪力與旋轉慣性矩效應等對自然振動頻率之影響。為了方便討論，本文將離層長度與離層位置無因次化(non-dimensionalize)。

$$d = \frac{\bar{d}}{L_i} \quad 0 < d < 1 \quad c = \frac{\bar{c}}{L_i} \quad 0 < c < 1$$

其中 \bar{d} 為離層長度， \bar{c} 為離層中點距左端簡單支撐點的距離， L_i 為含離層複合樑的跨距， ω 為含離層之複合樑的自然頻率， ω_0 為無離層複合樑之自然頻率。而模態圖的縱軸均為經過正交化後的振幅，範圍為-1到1。

一、無離層連續樑的自然頻率

(一) 連續樑的頻譜 (Natural frequency spectrum)

Fig.4-1 為等跨距 (span) 連續樑的頻譜，y 軸為樑跨距數 N 從 1 到 ∞ ，x 軸為樑之自然振動頻率經無因次化後之值；圖中群組(group)之定義以自然數的平方為起始基數，例如：不論跨距數 N 為多少，其第一群組自然振動頻率起始值為 1，第二群組自然振動頻率起始值為 4，第三群組自然振動頻率起始值為 9，依此類推；且每一群組之自然振動頻率個數與跨距數相等。此外每一個群組中其頻率值大小有一定範圍， $m^2 \leq \omega/\omega_0 \leq (m+0.5)^2$ 為判定公式[29]，其中 m 為整數，表第 m 個群組， $\omega/\omega_0 = m^2$ 為簡支樑之頻率值，而 $\omega/\omega_0 = (m+0.5)^2$ 為固定樑 (clamped) 之頻率值。等跨距連續樑之自由振動模態為正弦 (sine) 波形，例如 Fig.4-2 所示為 N=1 之單一跨距模態圖，mode 1 為整個跨距中有半正弦波 1 個，mode 2 為整個跨距中有半正弦波 2 個，依此類推，mode n 為整個跨距中有半正弦波 n 個。當 N=2 (two spans) 時，其模態如 Fig.4-3 所示，mode 1 為整個樑中有半正弦波 2 個，一正一負，mode 2 為整個樑中亦有半正弦波 3 個，依此類推，mode n 為整個樑中有半正弦波 n+1 個。當 N=3 (three spans) 時，其相對模態如 Fig.4-4 所示，mode 1 為整個樑中有半正弦波 3 個，mode 2 為整個樑中有半正弦波 4 個，mode 3 為整個樑中有半正弦波 5 個，依此類推，mode n 為整個樑中有半正弦波 n+2 個。故當跨距數 N=k 時，其模態圖第 n 個模態中有半正弦波 n+k-1 個。

前述為等跨距之連續樑，Fig.4-5 為雙跨距(two spans)樑之自然振動頻率與不同跨距長度比的關係圖。其中 L_1 代表左端跨距且其長度為固定， L_2 代表右端跨距，其長度與 L_1 成

一比例， ω_0 代表單一跨距其長度為 L_1 時之自然振動頻率。在第一個模態中，當兩個跨距比值 L_1/L_2 小於 1 時，其頻率變化較大，超過 1 後趨於穩定；當 $L_1/L_2=20$ 時， $\omega/\omega_0 = 1.514$ ，若依理論推斷，其值應趨向於一端為固定另一端為簡支之單跨距樑之值，即 $\omega/\omega_0 = 1.25^2 = 1.5625$ [27]。在第二個模態中，當兩個跨距比值 L_1/L_2 小於 2 時，其頻率變化較大，超過 2 後趨於穩定；當 $L_1/L_2=20$ 時， $\omega/\omega_0 = 4.915$ ，最終其值應趨向於 $\omega/\omega_0 = 2.25^2 = 5.0625$ 。在第三個模態中，當兩個跨距比值 L_1/L_2 小於 3 時，其頻率變化較大，超過 3 後趨於穩定，當 $L_1/L_2=20$ 時， $\omega/\omega_0 = 10.269$ ，最終其值應趨向於 $\omega/\omega_0 = 3.25^2 = 10.5625$ 。由此可知，第 n 個模態之頻率亦隨 L_1/L_2 比值而有變化，在 L_1/L_2 小於 n 時，會有較劇烈的波動，而 L_1/L_2 大於 n 之後即趨於穩定，就其原因可由模態圖中探討，現以 $n=3$ 為例，當 L_1/L_2 之值在 0~3 之間有三個弧線波形，由 Fig.4-6 模態圖分析，每個樑均有半正弦波 4 個，當 L_1/L_2 之值小於 1 時， $L_1/L_2=0.5$ 左端跨距中只有半正弦波 1 個，當 $L_1/L_2=1$ 時 L_1 中有半正弦波 2 個，當 $L_1/L_2>3$ 時，不論 L_2 如何變動 L_1 最多有半正弦波 3 個。由上述可以類推，在前五個模態中，每一個弧線之轉折代表其模態跨距之半正弦波增減之範圍，且每一個跨距不論長短，其含有半正弦波數最多等於其模態數，如模態三中左側跨距最多有三個半正弦波。此外每一跨距比值 (L_1/L_2) 大於模態數之後其頻率變化很小，且趨向於邊界一端為固定一端為簡支之單跨距樑的頻率值。

Fig.4-7 為三個跨距(three spans)樑的頻率曲線， L_1 代表左端跨距， L_2 代表中間跨距， L_3 表右端跨距且與 L_1 等長， ω_0 代表單一跨距自然振動頻率，在此固定 L_2 與單一跨距等長，變動 L_1 ，其曲線形態與 Fig.4-5 相似。在第一個模態中，當兩個跨距比值 L_2/L_1 小於 1 時，其頻率變化較大；超過 1 後趨於穩定，當 $L_2/L_1=20$ 時， $\omega/\omega_0 = 2.133$ ，若 $L_2/L_1 \rightarrow \infty$ 時， $\omega/\omega_0 \rightarrow 1.5^2 = 2.25$ 。在第二個模態中，當兩個跨距比值 L_2/L_1 小於 2 時，其頻率變化較大，超過 2 後趨於穩定，當 $L_2/L_1=20$ 時， $\omega/\omega_0 = 5.896$ ，若 $L_2/L_1 \rightarrow \infty$ 時， $\omega/\omega_0 \rightarrow 2.5^2 = 6.25$ 。因此，由上述可知當 L_2/L_1 在之值大於模態數時，其值最終趨向於邊界兩端皆為固定一端樑的頻率值。

(二) 剪力與旋轉慣性矩效應

當樑無離層時， ω_0 為不考慮樑的剪力與旋轉慣性矩效應影響的自然振動頻率值。剪力之影響隨著厚長比(h/L)的增加及模態數的不同而有不同的影響，Fig.4-8 為單一跨距簡支樑其樑厚長比與振動頻率的關係圖，圖中顯示，當 $h/L=0.1$ 時，模態一之 $\omega/\omega_0 = 0.983$ ，降低了約 1.7%，但對第二模態而言 $\omega/\omega_0 = 3.754$ ，降低了 6.15%，而在第三模態降低了 12.2%，此因高模態具有較多的半正弦波，因此以樑厚與一個半正弦波長相比所得之 h/L 更大，因而剪力的影響也變得愈明顯。

Fig.4-9 為雙跨距(two spans)等距簡支樑，其厚長比與自然振動頻率的關係圖。因連續樑之斷面為相同之厚度，故其頻率下降之值與 Fig.4-8 比較，在 $\omega/\omega_0 = 1, 4, 9$ 三個各別模態的頻率變化並無不同，而與 Fig.4-8 之差異為每一頻率群組多出一個模態。

二、含離層連續樑之自由振動

(一) 離層長度的影響

1. angle-ply $[\theta/-\theta/\theta/-\theta]$ 或對稱(symmetric)樑板

複合層樑中，所有纖維疊層排向角度為一致者，若只考慮單一軸向，此時可視為等向性(isotropic)材料，而疊層為對稱之複合層樑，因其耦合矩陣 $B_{ij} = 0$ ，故在單一軸向所得到的結果與等向性材料相同。Fig.4-13 為單一跨距之複合疊層樑板，離層發生位置為樑之正中央($c=0.5$)及距左端支點 $c=0.4$ 、 0.3 、 0.2 之位置，圖中顯示不同離層位置其自然頻率與離層長度的關係圖，因複合樑的整體勁度隨著離層長度的增加而遞減，因此其自然頻率逐漸隨離層長度增加而減小；當離層中心位置在中央($c=0.5$)，樑完全離層($d=1$)時，第一模態降為 0.797，第二模態降為 2.0，第三模態降為 4.948，其原因乃是完全離層後樑之勁度為原來無離層樑的 0.25 倍。若離層長度小於 $d=0.2$ 時，對第一模態幾乎沒有影響，但對於第二模態已有顯著影響，這是因為離層已經受到剪力作用的影響，此可由模態圖(Fig.4-10)中可看出；而當離層長度大於 $d=0.5$ 時第二模態進入彎矩區，其振動頻率降幅開始減緩。第三模態一開始在高彎矩區，頻率尚未受到很大影響；當離層長度大於 $d=0.2$ 時進入剪力區，振動頻率陡降，一直到離層長度 $d=0.75$ 後才減緩。若離層發生位置為距樑左端支承 $c=0.4$ 及 0.3 作比較，在第二模態中， $c=0.4$ 者比 $c=0.3$ 者較靠近剪力區，故其振動頻率降低較早及降低較多；但在第三模態卻相反，這亦可由模態圖(Fig.4-10)中看出 $c=0.3$ 者接近剪力區之故。當 $c=0.2$ 時其在第二、三模態在彎矩區，故其降幅較小。

Fig.4-14 為一跨距數為二之等跨距複合疊層樑，離層發生在左端跨距，其位置為距離樑左端支點 $c=0.5$ 、 0.4 、 0.3 、 0.2 之處，圖中顯示出不同離層長度對自然頻率的影響。當離層發生位置在左端樑之中央($c=0.5$)時，第一模態與單一跨距的第一模態(Fig.4-13)類似，但其完全離層($d=1.0$)之振動頻率為 0.835，比單一跨距第一模態完全離層時高，其原因是右側之樑所提供邊界條件不同而頻率降低沒有那麼多；而離層位置 $c=0.4$ 、 0.3 、 0.2 之分析與單一跨距樑之模態一相同。第二模態在離層位置 $c=0.5$ ，離層長度小於 $d=0.3$ 時其與第一模態 $c=0.5$ 降幅相當，當離層長度大於 $d=0.3$ 之後，降幅增加，而在離層長度 $d=0.9$ 時降幅減緩，此乃是離層右側進入彎矩區，此特點可由模態圖(Fig.4-11)中可看出。模態三的頻率變化趨勢與單一跨距之模態二(Fig.4-13)一致，但其完全離層的振動頻率($\omega/\omega_0 = 2.472$)比單一跨距之模態二($\omega/\omega_0 = 2.0$)高，這也是離層樑之右側增加另一跨距的緣故。模態四的離層一開始發生在剪力區，當離層位置 $c=0.5$ ，離層長度 $d=0.1$ 時，振動頻率已經下降；當離層長度 $d=0.4$ 時，離層振動頻率降幅稍緩，此時在模態圖中離層的位置已進入高彎矩區。模態五的頻率變化趨勢與單一跨距(one span)之模態三(Fig.4-13)一致，所不同的是當離層位置 $c=0.5$ ，離層長度大於 $d=0.8$ 之後，頻率持續下降，因為此時離層進入剪力區，且剪力對其影響較大，當完全離層時，其振動頻率($\omega/\omega_0 = 5.372$)亦比單一跨距第三模態振動頻率($\omega/\omega_0 = 4.948$)高。

Fig.4-15 為一跨距數為三之等跨距複合疊層樑，離層發生在中間跨距，離層位置為中間跨距左端支點 $c=0.5$ 、 0.4 、 0.3 、 0.2 之位置，圖中顯示不同離層長度對自然頻率的影響。當離層位置為左端樑之中央($c=0.5$)時，第一模態與單一跨距的第一模態(Fig.4-13)比較，當完全離層時，其振動頻率為 0.875，因左右兩端各多一跨距，因邊界條件改變，使得離層

對振動頻率影響降低。因此若樑的總長不變，跨距增加，單一跨距之離層相對減短，故在第一模態中，跨距數愈多其振動頻率(ω/ω_0)受單一離層影響愈少。第二模態中，其振動頻率受離層影響較少，因為由模態圖(Fig.4-12)中可觀察出，其曲線變化相較於左右兩跨距小，其剪力、彎矩變化較小；在模態三中，當 $c=0.5$ 時，其位置在高剪力區，頻率降幅較少，曲線形狀類似模態一；在此模態中， $c=0.2$ 最靠近剪力區，故其頻率下降最快降幅亦最大。模態四與模態五其分析之方式如同前述，離層位於剪力區將造成自然振動頻率下降，位於彎矩區則影響較少。

2.cross-ply 離層樑板[0/90/90/0]

Fig.4-16 為四層複合樑之離層長度與自然頻率關係圖，複合樑疊層角度為[0/90/90/0]之對稱複合樑，當其離層後在離層區域產生非對稱之現象，在 $c=0.5$ 時，其完全離層後，第一模態振動頻率降至 0.52，第二模態振動頻率降至 1.035，第三模態振動頻率降至 2.869，比起 Fig.4-13 等向性(isotropic)材料振動頻率要低的多，主要原因乃是離層勁度由對稱之 0.25 降低至非對稱之 0.08，因此其在承受剪力的能力大幅降低。離層曲線變化分析方式，與前述等向性層板相同。比較特別的是在第三模態，離層位置 $c=0.5$ 時，離層長度 $d=0.2\sim 0.5$ 特別明顯，此時離層位於剪力區，振動頻率下降的很多。當離層中心位置為 $c=0.4$ 時，其第三模態曲線變化較多，這是因為其開始在剪力區，當 $d=0.2$ 時在彎矩區， $d=0.4$ 時在剪力區， $d=0.55$ 時在彎矩區，剪力彎矩區不斷出現之故。 $c=0.3$ 、 $c=0.2$ 時，離層曲線變化分析方式，與前述等向性層板相同。Fig.4-17 為雙等跨距疊層纖維排向[0/90/90/0]之複合樑離層長度對振動頻率影響關係圖，其離層為位於左端跨距。模態一與單一跨距[0/90/90/0]樑(Fig.4-16)之模態一比較趨勢相當，但在完全離層($d=1$)時，其因右側多一跨距，當 $c=0.5$ 時，振動頻率提高為 $\omega/\omega_0 = 0.527$ 。又 $c=0.5$ 時，模態二與等向性材料雙跨距樑(Fig.4-14)之模態二比較，當離層長度($d=0.2\sim 0.5$)進入剪力區時，離層非對稱振動頻率降幅離層對稱大，這顯示出此部份相對剪力較大，這一點在模態三離層 $d=0.15\sim d=0.3$ 亦有相同結果；模態四、五其振動頻率變化較大，其乃是模態圖中，剪力、彎矩區較多之故。 $c=0.4$ 在第二模態中，一開始位於彎矩區，當離層長度 $d=0.2$ 時進入剪力區，頻率降幅加大，一直到 $d=0.6$ 離層右側進入彎矩區，降幅稍緩。第五模態中，模態圖可由前述推斷，其在左側跨距之圖形如同單一跨距(Fig.4-2)之模態三相同， $c=0.4$ 、 $c=0.3$ 皆靠近剪力區， $c=0.3$ 一開始振動頻率先下降，其亦先通過彎矩區，故其亦先降幅減緩，在 $d=0.5$ 時離層左側又進入剪力區，降幅再增加。在 Fig.4-18 為一跨距數為三之等跨距複合疊層樑，離層位置在中間跨距內，層板疊層纖維排向為[0/90/90/0]，其模態一與單一跨距疊層纖維排向為[0/90/90/0]之樑的模態一(Fig.4-16)比較，在完全離層時，其振動頻率由單一跨距($\omega/\omega_0 = 0.520$)變成雙跨距($\omega/\omega_0 = 0.527$)到三跨距 $\omega/\omega_0 = 0.553$ ，顯示出連續樑振動頻率受單一離層影響隨跨距增多而減少。Fig.4-18 圖中的第一、四、七三個模態與雙跨距之第一、三、五及單跨距之第一、二、三模態，共三組模態，其各組趨勢因模態圖相似而近似，但跨距多者，完全離層時的振動頻率降幅較少。

(二) 離層位置的影響

1. angle-ply [θ / - θ / θ / - θ] 或對稱(symmetric)樑板

Fig.4-19 為單一跨距(one span)複合樑，其固定離層長度之位置(c)對自然頻率的影響，其中固定離層長度取 $d=0.2$ 、 $d=0.4$ 、 $d=0.6$ ；在第一模態中，離層中心位置離樑的中心點愈遠者，頻率降低愈大，離層帶來的影響愈明顯，原因是第一模態圖(Fig.4-10)中， $c=0.5$ 之位置樑的彎矩效應大，剪力效應小。而在第二模態中，由模態圖(Fig.4-10)中可知：離層在 $c=0.25$ 及 $c=0.75$ 位置為高彎矩區，故接近這兩區者，其振動頻率較高。相反地，離層位置 $c=0.5$ 處為高剪力區，故離層位置在此區時，其振動頻率將低。在第三個模態中，可看出在 $c=0.5$ 處 $d=0.2$ 及 $d=0.4$ 兩者振動頻率高；但 $d=0.6$ 者其振動頻率卻降低，這是因為離層長度 $d=0.6$ 時，已經同時跨入高剪力及高彎矩區。

Fig.4-20 為雙等跨距複合樑之離層位置與振動頻率關係圖，其中含離層之複合樑在左側跨距。在第一模態中，其與單一跨距(Fig.4-19)之第一模態趨勢相同，皆為離層愈遠離樑中心，其對振動頻率之影響愈大。在第二模態中，因右側受另一跨距所影響，模態圖(Fig.4-11)中彎矩區整體向右移，造成第二模態振動頻率最高值的點向右移；且距離最左端支撐 $d=0.9\sim 1.0$ 之位置為高彎矩區，與單一跨距模態一(Fig.4-10)之剪力區不同，此時， $d=0.4$ 及 $d=0.6$ 皆跨入剪力及彎矩同時存在區域內，因此造成曲線的明顯不對稱。此外，因含離層之跨距靠左側剪力區較大，其離層位置小於 $d=0.5$ 者愈往左側(剪力區)則離層造成影響愈大。在第三模態中，當離層長度 $d=0.2$ 與 $d=0.4$ 兩者，其與單一跨距之模態二(Fig.4-10)趨勢相同，振動頻率最低點向右移；但 $d=0.6$ 時，其所受右側跨距未含離層之影響，離層位於剪力及彎矩區，造成振動頻率降幅比單一跨距之相同模態明顯。

Fig.4-23 為三跨距複合樑之離層位置與振動頻率關係圖，其中含離層之複合樑在中央跨距。第一模態仍然和前述單一跨距與雙跨距的第一模態趨勢相同，但整體的振動頻率提高。第二模態因離層位置對振動頻率影響很小，主要是在此模態圖(Fig.4-12)中剪力及彎矩變化較小。第三模態中，其模態圖(Fig.4-12)與第一模態模態圖之差異為，距離接近兩端支點處原為剪力區(mode 1)轉變成彎矩區(mode 3)，使得剪力區往樑中間移，對離層較長者，離層效果較明顯。模態四又形成與單一跨距(Fig.4-19)的模態二相似的對稱圖形，離層位於樑中央($c=0.5$)為高剪力區，振動頻率較低；在 $c=0.25$ 及 $c=0.75$ 為高彎矩區頻率較高，此與前述相同。

2. cross-ply 離層樑板[0/90/90/0]

Fig.4-22 為單一跨距當離層產生非對稱時，離層位置與振動頻率之關係圖，在第一模態中，和離層為對稱者相同，皆為離層位置愈遠離樑正中央($c=0.5$)，其離層效果愈大，但是在非對稱者振動頻率降幅更大。模態二中，因離層長度愈長其勁度愈小，造成曲線變化幅度加大。模態三中，離層長度($d=0.2$ 與 0.6)間之距離加大，振動頻率相差更多，這顯示高模態受離層影響比低模態明顯，而非對稱比對稱離層更容易觀察出。

Fig.4-25 為雙等跨距當離層產生非對稱，離層位置與振動頻率之關係圖，此時，產生離層之跨距在左側。在第一模態與第二模態中，因右側邊界改變而使振動頻率最高點向右移，此點可由模態圖(Fig.4-11)中左側離層樑彎矩區右移之改變可瞭解。第三模態中，

離層長度 $d=0.2$ 時，和離層等向性材料之相同模態(Fig.4-19)比較，其因非對稱及勁度降幅較大，造成曲線變化幅度亦加大；而當離層長度 $d=0.4$ 時，離層在剪力區($c=0.5$)和彎矩區($c=0.3$ 及 $c=0.8$)之差距很大，主要是此長度恰與模態圖中之剪力區與彎矩區相當，完全位於剪力區及完全位於彎矩區之效果非常明顯；當離層長度為 $d=0.6$ 時，與離層為對稱之相同模態(Fig.4-19)比較，振動頻率所受離層位置之影響較少，顯示出離層長度超過 $d=0.6$ 在任何位置對振動頻率影之影響不大。

Fig.4-26 為三跨距離層為非對稱且位於中央跨距，離層位置與振動頻率之關係圖；在第一模態，仍然以樑中央位置($c=0.5$)為振動頻率受離層影響較少；第二模態中，其中央位置($c=0.5$)為剪力區，故愈接近此位置振動頻率愈低。第三模態中，其中央位置($c=0.5$)為彎矩區，故愈遠離此位置振動頻率愈低，但此連續樑之兩側有另兩跨距，其靠兩支承處為彎矩區，此可由模態圖(Fig.4-12)可看出，故其振動頻率降幅稍緩。第四模態中，其中央位置($c=0.5$)為剪力區，故愈在此位置振動頻率較低，但 $d=0.6$ 之曲線卻相反，其原因乃是當在此位置時，離層左右因長度較長已跨入左右兩個高彎矩區。離層位置向左右移時，其一端遠離彎矩區，另一端進入令一剪力區，故其振動頻率隨離層遠離中央($c=0.5$)而降低。

(三) 離層加剪力對複合樑之影響

1. angle-ply [$\theta/-\theta/\theta/-\theta$] 或對稱(symmetric)樑板

離層會降低樑之自然振動頻率，考慮樑之大厚長比(h/L)時亦會降低樑之自然振動頻率，本節將兩者合併討論。Fig.4-25 為複合層樑考慮剪力與旋轉慣性矩效應，其離層長度與自然振動頻率之關係圖。在第一模態中，可發現剪力與旋轉慣性矩效應在小於 $h/L=1:20$ 不明顯，如 $h/L=1:50$ ，其離層未發生時，頻率為 0.999，而 $h/L=1:20$ ，其離層未發生時，頻率為 0.996，當完全離層時頻率為 0.796，當 $h/L=1:10$ ，其離層未發生時，頻率為 0.983，當完全離層時頻率為 0.792，當完全離層時未考慮剪力效應時頻率為 0.797，而其離層頻率變化分析與前述單一跨距 Fig.4-13 相同。在第二模態中，可發現剪力與旋轉慣性矩效應對高頻的影響逐漸明顯，例如：當離層未發生時，頻率為 4.0， $h/L=1:20$ ，其離層未發生時，頻率為 3.933，正交規一化後為 98.3%，而 $h/L=1:10$ ，其離層未發生時，頻率為 3.754，正交規一化後為 93.9%；當完全離層未考慮剪力效應時頻率為 2.0， $h/L=1:20$ 完全離層時頻率為 1.991，正交規一化後為 99.6%。；當 $h/L=1:10$ 完全離層時頻率為 1.967，正交規一化後為 98.4%。三者差距漸漸加大；由圖中可觀察出在第三模態則降幅更為擴大。因此，以降幅而言，當離層愈大，相對降幅愈少，這是因為一開始之厚長比 h/L 大，完全離層時其厚長比 h/L 為未離層的一半，其頻率降幅當然較小，因此，厚長比 h/L 大者，其頻率降幅非長常大。Fig.4-26、Fig.4-27 為雙等跨距及三等跨距複合層樑考慮厚長比，其離層長度與自然振動頻率之關係圖。兩圖中可看出在低模態中，其離層自然振動頻率因剪力影響較少，模態數愈高，影響愈大；除增加剪力效應造成頻率降低之外，曲線的趨勢大致與前述等向性材料(isotropic)Fig.4-14、Fig.4-15 中 $c=0.5$ 相同。Fig.4-28 為單一跨距與雙等跨距及三跨距之比較，其中只選自然振動頻率為 1、4、9 三組值作比較，其結論為跨距數多者，其相對振動頻率較高。

2.cross-ply 離層樑板[0/90/90/0]

當離層為非對稱，且又須考慮厚長比 h/L 剪力時，材料常數變便佔有重要地位。在下列三組離層非對稱圖中，以常用航空複合材料 AS4/3501-6 石墨樹脂為對象，其材料參數為 $E_1=13.643E_2$ ， $G_{12}=0.439E_2$ 及 $\nu_{12}=0.32$ ，層數為四層。因為此材料之主軸方向剪力係數 G_{12} 與彈性係數 E_1 倍數相差太大，等向性材料 $E:G=8:3$ ，此材料 $E:G_{12}=31.08:1$ ，造成材料未發生離層時，因樑的長寬比 h/L 剪力效應影響非長常大，振動頻率降低很大。Fig.4-29 為離層非對稱部份複合層樑，考慮厚長比，其離層長度與自然振動頻率之關係圖。在第一模態中，可發現剪力與旋轉慣性矩效應已明顯，離層未發生時， $h/L=1:20$ 之樑其自然振動頻率降至 0.97，當 $h/L=1:10$ 之樑其自然振動頻率降至 0.894，差距非常大；而完全離層時 $h/L=1:20$ 之樑其自然振動頻率降至 0.514，當 $h/L=1:10$ 之樑其自然振動頻率降至 0.498。在第二模態中，可發現剪力與旋轉慣性矩效應非常明顯，離層未發生時， $h/L=1:20$ 之樑其自然振動頻率降至 3.578，當 $h/L=1:10$ 之樑其自然振動頻率降至 2.835，差距非常大；而完全離層時 $h/L=1:20$ 之樑其自然振動頻率降至 1.012，而完全離層時 $h/L=1:20$ 之樑其自然振動頻率降至 0.952，完全離層與無離層間之差距非長常明顯。在模態三更為明顯，因厚長比剪力之影響更大，而厚長比大者(1:10)，其因本身頻率較低，而降幅亦較緩。Fig.4-30、Fig.4-31 為雙等跨距及三跨距複合層樑考慮厚長比，其離層長度與自然振動頻率之關係圖。為了比較上的方便，兩圖中只繪出振動頻率為 1,4,9 三組圖形，由圖形可看出在低模態中，其離層自然振動頻率因剪力影響較少，模態數愈高，影響愈大；離層愈長，剪力效應造成頻率降低效果愈低。

第五章 結論

綜合以上分析，可知在不同跨距條件下，沒有離層連續樑的自然頻率與模態有一定規則；而離層對 angle-ply 與 cross-ply 連續樑的自然頻率之影響，兩者可規納成下列幾點：

- (一) 當等跨距連續樑中，離層長度小於 10% 時，離層對樑的自然頻率影響很小；離層長度超過 10% ，則樑的自然頻率降幅增大，以相同離層長度而言，單一跨距樑其自然頻率降幅比雙跨距樑之降幅大，而雙跨距樑其自然頻率降幅又比三跨距樑之降幅大。若以等跨距複合連續樑其疊層角度為討論對象，當離層長度一定，複合連續樑疊層為 cross-ply 時，因非對稱及勁度降低之影響，其自然頻率比疊層為 angle-ply 者更容易受離層影響。
- (二) 以本文討論之等跨距連續樑而言，因跨距數的不同，每一群組(group)的模態數便不同，而跨距數等於每一群組中之模態數，當離層未發生時，每一群組之自然頻率起始值，經無因次化後為自然數的倍數($\omega/\omega_0 = 1,4,9\dots$)，因此，自然頻率小於等於 9 者，單一跨距樑有三個模態，雙跨距樑有五個模態，三跨距樑有七個模態。當連續樑有離層時，自然頻率值為自然數的倍數之模態，其模態圖、離層長度及位置對自然頻率關係圖形比較接近。

- (三) 未含離層之連續樑其自然頻率因厚長比 h/L 增加而降低；當厚長比一定且樑中有離層發生時，離層長度愈長，樑之厚度相對減少，因此，因厚長比所產生之剪力影響亦減少。以本文討論之等跨距連續樑而言，當離層長度一定時，三跨距樑受厚長比剪力效應影響較大，雙跨距樑次之，單跨距樑受厚長比剪力效應影響較小。若比較完全離層與剪力效應兩者對自然頻率的影響，則完全離層對自然頻率的影響比較大。
- (四) 當離層長度固定時，自然頻率的高低與離層在模態圖中剪力及彎矩區的位置相關。在本文討論之等跨距連續樑第一模態中，離層中心位置在跨距之中點時，有最高頻率值，當離層位置遠離跨距之中點時，其自然頻率下降，且單跨距樑自然頻率之降幅比雙跨距者大，雙跨距樑自然頻率之降幅又比三跨距者大。其餘之模態，單跨距樑及三跨距樑之離層位置在跨距的中點時，有最高或最低自然頻率值，且其自然頻率與離層位置關係圖形呈對稱形態，而雙跨距樑因受另一側未含離層跨距之影響，其自然頻率最高或最低點的位置將往未含離層跨距的那一側移。

附 圖

