

# 分數階 PID 控制器應用於倒單擺系統

林育賢<sup>1</sup>

## 摘要

在工業程序控制上，大部分的控制器都是使用 PID 控制器。PID 控制器之所以會被廣泛應用在工業系統上，主要原因是因為結構簡單，容易了解、設計與實現，因此 PID 控制器參數的求解就是目前主要研究課題之一。

因為 PID 控制參數之調整會相互影響干擾，因此要得到設定點的追蹤與抗干擾能力強的雙重目標並不容易，適當調整控制器參數為極具挑戰性之任務，因此本論文擴展 PID 控制器之功能，將整數階 PID 控制，另加入非整數積分次方項( $\lambda$ )與非整數微分次方項( $\delta$ )，而形成分數階 PID 控制器(Fractional Order Controller)。在分數階 PID 控制器中較整數 PID 控制器多兩個變數，可藉由變數微調整，進而減少參數相互干擾的現象與更適合受控廠所需之控制指標。但為了減少參數相互干擾問題，卻帶來參數設定不易的困境，因此本論文中，採取數值分析-利用單形法概念(Nelder and Mead Simplex Search Method；NM 法)與粒子群最佳化演算法(Particle Swarm Optimization；PSO 法)...等人工智慧，來解決參數最佳化的問題。本文利用倒單擺系統作為控制標的，設計分數階 PID 控制器，經由參數的最佳化，其系統動態模擬結果，顯示本論文所提方法，可較傳統方法得到更優越之控制性能。

關鍵字：分數階 PID 控制器，人工智慧，單形法，粒子群最佳化演算法，倒單擺系統

---

<sup>1</sup>林育賢/高雄高工教師/國立高雄應用科技大學電機工程研究所

## 一、前言

控制系統的基礎是源自於控制理論，控制理論的發展，目前分成三個階段。第一階段從二十世紀初開始，以古典回授控制理論(Feedback Control)為發展目標，其中有 Bode、Nichols、Nyquist... 等人作了重大貢獻，使該階段更加成熟。而本文所探討的 PID (Proportional-Integral-Derivative) 控制器，在該階段中，1922 年的 Minorsky 提出 PID 控制器的構想，而 1936 年 Callender 等人的論文中提出整數階 PID 控制器的架構原型。到了 60 年代，經由線性代數引進到控制理論當中，控制領域進入了第二階段，以狀態空間(State Space)表示的現代控制理論，如極點配置法(Pole Placement Design)、線性二次調節器(Linear Quadratic Regulator, LQR)... 皆屬於該階段。經過電腦科技的發展，幫助了控制理論的快速計算而進入第三階段，以有許多學者們陸續提出具有需要大量計算能力的人工智慧或是搜尋最佳化的相關理論。如：模糊邏輯(Fuzzy Logic)、類神經網路(Artificial Neural Network)、基因演算法(Genetic Algorithms)、粒子群最佳化(Particle Swarm Optimization)... 等。同時間 1991 年法國科學家 Oustaloup 提出以分數階強健性來研究分數階控制器，提出 CRONE (commande robuste d'ordre nonentier) 非整數階強健控制策略。分數階 PID 控制器由 I.Podlubny 所提出其架構為  $PI^\lambda D^\delta$ ，因此多了兩個可調整參數進而提升控制器性能。

而本文中的目的，就是利用上述之整數階/分數階 PID 控制器、粒子群最佳化的控制方法，來針對倒單擺系統(Inverted Pendulum System)進行控制，達到倒單擺穩定的效果。

## 二、模型建立與系統數學模型推導

### 2.1 模型建立與系統參數

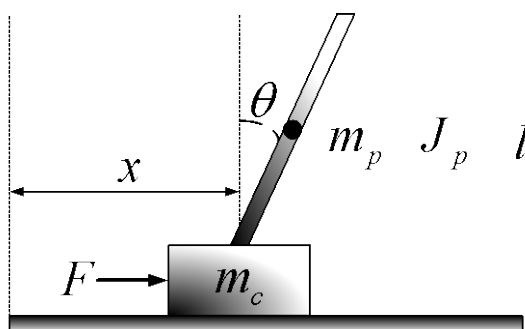


圖 2-1 台車與桿系統示意圖

車與桿之倒單擺系統如圖 2-1 所示，此單擺為一個沿著支點旋轉並且無致動器的連桿，其連桿為一個質量均勻分布的物體，因此重心集中於連桿中心處。將其連桿以支架

裝設置台車上，台車具有致動器，可在一維的軌跡路徑上移動。台車與連桿系統中，所表示各項物理參數定義如表 2-1 所示。

表 2-1 台車與桿系統物理參數

| 符 號            | 單 位                           | 說 明     |
|----------------|-------------------------------|---------|
| $x$            | m                             | 台車移動距離  |
| $\dot{x}$      | m/s                           | 台車移動速度  |
| $\theta$       | rad                           | 連桿傾斜角度  |
| $\dot{\theta}$ | rad/s                         | 連桿角速度   |
| $m_c$          | kg                            | 台車重量    |
| $m_p$          | kg                            | 連桿重量    |
| $J_p$          | $\text{kg} \times \text{m}^2$ | 連桿轉動慣量  |
| $F$            | nt                            | 台車移動控制力 |
| $g$            | $\text{m/s}^2$                | 重力加速度   |

## 2.2 系統數學模型推導

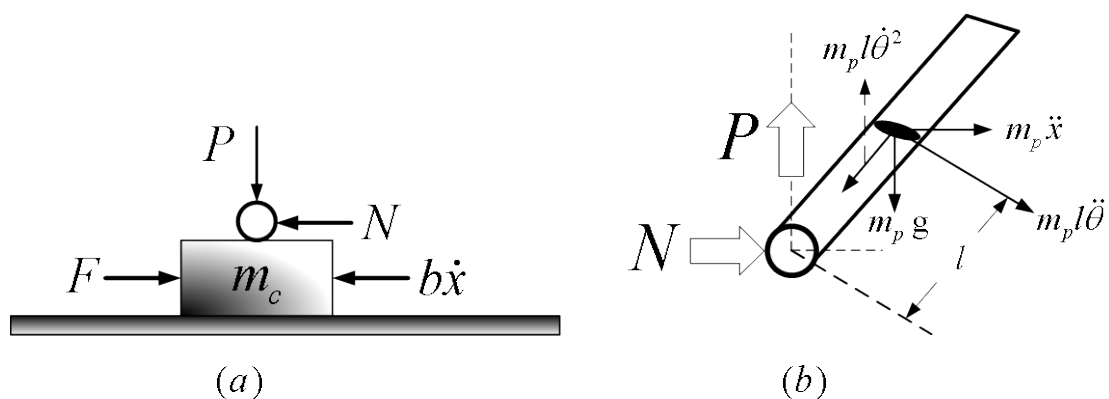


圖 2-2 倒單擺自由體圖(a) 台車自由落體示意圖 (b) 連桿自由落體向量分析  
 假設控制力  $F$  僅能使台車往水平移動，因此可由圖 2-2 (a) 中利用牛頓第二運動定理可整理出

$$F - N - b\dot{x} = m_c \ddot{x} \tag{1.1}$$

假設系統中忽略摩擦係數，再由圖 2-2 (b)，分析水平向量  $N$ ，可得

$$N = m_p \frac{d^2}{dt^2}(x + l \sin \theta) = m_p \ddot{x} + m_p l \ddot{\theta} \cos \theta - m_p l \dot{\theta}^2 \sin \theta \quad (1.2)$$

將(1.2)式代入(1.1)，可得

$$F - (m_p \ddot{x} + m_p l \ddot{\theta} \cos \theta - m_p l \dot{\theta}^2 \sin \theta) = m_c \ddot{x} \quad (1.3)$$

再將(1.3)式分項整理，可得

$$(m_p + m_c) \ddot{x} + (m_p l \ddot{\theta} \cos \theta - m_p l \dot{\theta}^2 \sin \theta) = F \quad (1.4)$$

再由圖 1-2 (b)，分析於垂直向量  $P$ ，可得

$$m_p g - P = m_p \frac{d^2}{dt^2}(l - l \cos \theta) = m_p l \ddot{\theta} \sin \theta + m_p l \dot{\theta}^2 \cos \theta \quad (1.5)$$

因連桿在不平衡時，造成連桿傾斜具有旋轉特性，此時的轉動慣量分析，可得

$$(P \sin \theta - N \cos \theta)l = J_p \ddot{\theta} = \frac{1}{3} m l^2 \ddot{\theta} \quad (1.6)$$

因為水平向量  $N$  與垂直向量  $P$  為系統中的反作用力，因此在運動方程式中，必須消去，所以將(1.2)與(1.5)代入(1.6)，可得

$$J_p \ddot{\theta} = \frac{1}{3} m_p l^2 \ddot{\theta} = m_p g l \sin \theta - m_p l^2 \ddot{\theta} - m_p l \ddot{x} \cos \theta \quad (1.7)$$

整理(1.7)式，可得

$$\frac{4}{3} m_p l^2 \ddot{\theta} - m_p g l \sin \theta + m_p l \ddot{x} \cos \theta = 0 \quad (1.8)$$

所以我們利用牛頓力學推導出車與連桿系統的非線性動態方程式如下：

$$(m_p + m_c) \ddot{x} + (m_p l \ddot{\theta} \cos \theta - m_p l \dot{\theta}^2 \sin \theta) = F \quad (1.9)$$

$$\frac{4}{3} m_p l^2 \ddot{\theta} - m_p g l \sin \theta + m_p l \ddot{x} \cos \theta = 0 \quad (1.10)$$

### 2-3 系統動態非線性方程式之線性化

前面所推導出之系統動態方程式，因方程式中具有非線性項，對於所要探討的控制器設計較不易分析，因此將上節中的非線性方程式進行線性化，對於控制的選擇性可以加大，亦可改變成狀態空間的方式。

倒單擺系統其目的為直立不傾倒，其穩定點僅只有在  $\theta = 0^\circ$ ，所以當系統接近穩定點時， $\theta \cong 0^\circ$ ，作近似分析，因此  $\sin \theta \cong 0$ 、 $\cos \theta \cong 1$  以及  $\dot{\theta}^2 = 0^\circ$ 。因此可將(1.9)式與(1.10)式的非線性動態方程式轉變成線性動態方程式：

$$(m_c + m_p) \ddot{x} + m_p l \ddot{\theta} = F \quad (1.11)$$

$$\frac{4}{3}m_p l^2 \ddot{\theta} - m_p g l \theta + m_p l \ddot{x} = 0 \quad (1.12)$$

將(1.11)代入(1.12)，可整理得到

$$\ddot{\theta} = \frac{3g\theta(m_c + m_p)}{l(4m_c + m_p)} - \frac{3F}{4m_c l + m_p l} \quad (1.13)$$

將(1.12)代入(1.11)，可整理得到

$$\ddot{x} = \frac{4F}{4m_c + m_p} - \frac{3mg\theta}{4m_c + m_p} \quad (1.14)$$

定義狀態變數為  $x_1 = x$ ， $x_2 = \dot{x}$ ， $x_3 = \theta$ ， $x_4 = \dot{\theta}$ ，則系統之狀態方程式為

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-3m_p g}{4m_c + m_p} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{3(m_c + m_p)g}{(4m_c + m_p)l} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{4}{4m_c + m_p} \\ 0 \\ \frac{-3}{(4m_c + m_p)l} \end{bmatrix} F \quad (1.15)$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} \quad (1.16)$$

(1.13)~(1.16) 式將在控制系統模擬中作為系統模型，探討傳統 PID 控制器及分數階 PID 控制器對於倒單擺系統之控制性能。

### 三、粒子群演算法最佳化求解

粒子群最佳化演算法(Particle Swarm Optimization ; PSO 法)，文獻中最早是由 *Eberhart* 與 *Kennedy* 從觀察鳥類飛行與魚類覓食中的族群習慣，此演算法利用一種模擬大自然群體智慧的原理來找尋問題中最短路徑，進行找尋問題空間中最佳化的解答，由於 PSO 演算法不像基因演算法一般，需要進行交配突變來改變所調整的參數，因此相較於基因演算法，PSO 能更快的收斂於最佳解。

PSO 演算法開始執行時，族群中的每個粒子，於搜尋空間中隨機產生個別所代表目標函數的一個隨機解，然後以世代搜尋目標函數中最佳解，在每一次世代演化過程中，粒子藉由追蹤兩個最佳化值，不斷更新自己的搜尋速度與對應的位置，所更新的方式，為 *Eberhart* 與 *Kennedy* 最初所提出，搜尋示意圖為圖 3.1，其更新公式，如下

$$v_{id}^j = v_{id}^{j-1} + c_1 \times rand() \times (p_{id} - x_{id}^j) + c_2 \times rand() \times (p_{gd} - x_{id}^j)$$

$$x_{id}^{j+1} = x_{id}^j + v_{id}^j \times \Delta t$$

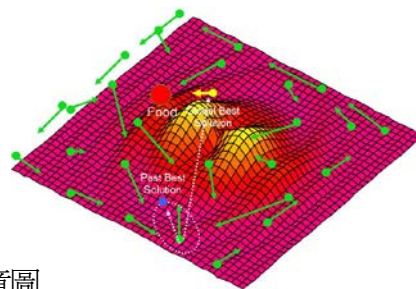
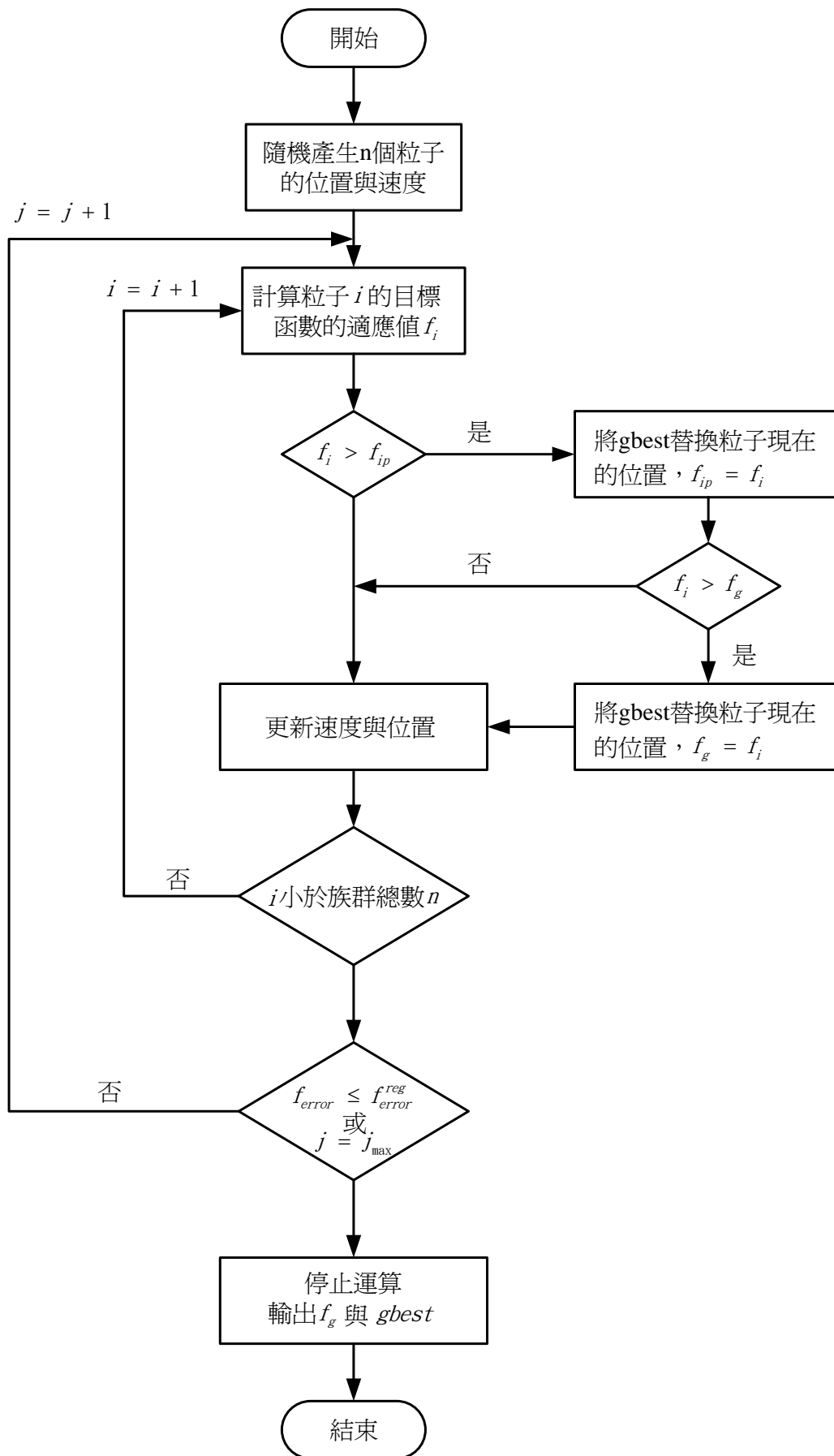


圖 3.1 搜尋示意圖

粒子群演算法的流程，如下所示：



### 四、分數階 PID 控制器參數設計

分數階 PID 控制器的一般形式為  $PI^\lambda D^\delta$  控制器，控制器本身包含原本整數階控制器中的三變數 ( $K_p$ 、 $K_i$ 、 $K_d$ )，在此增加一個積分階次  $\lambda$  與微分階數  $\delta$ ，來微調控制器性能，使其更加圓滑，於頻率響應中所對應到的波德圖大小增益值，所衰減的幅度為  $-20\lambda \text{ dB/dec}$ ，與一般整數一階積分器的  $-20 \text{ dB/dec}$ ，有所不同。如圖 4.1 所示

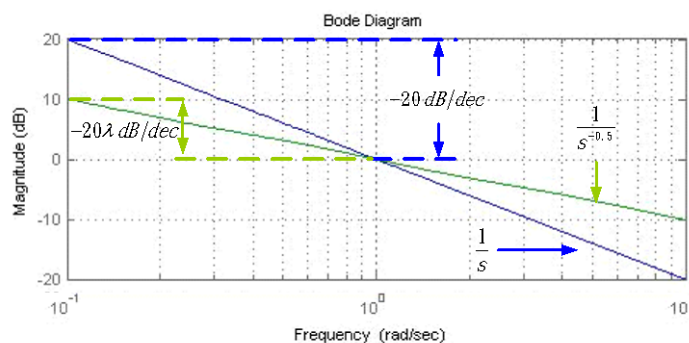


圖 4.1 頻率響應大小圖

依據頻率響應增益邊際與相位邊際之定義，先假設  $G_p(s)$  為簡單二階系統當作受控系統，可推導出分數階 PID 控制器方程式，如下：

$$\begin{aligned}
 K_p = & a_1 \omega_{cp}^{\lambda+\alpha} \frac{\sin \frac{(\alpha - \delta)\pi}{2}}{A_m \sin \frac{\delta\pi}{2}} + a_1 \omega_{cg}^{\lambda+\alpha} \frac{\sin \left( \frac{(\delta - \alpha)\pi}{2} - \phi_m \right)}{\sin \frac{\delta\pi}{2}} \\
 & + a_2 \omega_{cp}^{\lambda+\beta} \frac{\sin \frac{(\beta - \delta)\pi}{2}}{A_m \sin \frac{\delta\pi}{2}} + a_2 \omega_{cg}^{\lambda+\beta} \frac{\sin \left( \frac{(\delta - \beta)\pi}{2} - \phi_m \right)}{\sin \frac{\delta\pi}{2}} \\
 & + a_3 \omega_{cg}^\lambda \frac{\sin \left( \frac{\delta\pi}{2} - \phi_m \right)}{A_m \sin \frac{\delta\pi}{2}} - \frac{a_3 \omega_{cp}^\lambda}{A_m}
 \end{aligned}$$

$$K_i = \frac{\omega_{cp}^\lambda \omega_{cg}^\lambda (A_m \omega_{cg}^\delta I_{cp} - \omega_{cp}^\delta I_{cg})}{\sin \frac{\lambda\pi}{2} (\omega_{cg}^{\lambda+\delta} - \omega_{cp}^{\lambda+\delta})}$$

$$K_d = \frac{(A_m \omega_{cp}^\lambda I_{cp} - \omega_{cg}^\lambda I_{cg})}{\sin \frac{\delta\pi}{2} (\omega_{cg}^{\lambda+\delta} - \omega_{cp}^{\lambda+\delta})}$$

上述中的方程式，有五個變數，因此在決定參述過程中較不易找尋到全域最佳解，因此利用 PSO 演算法，可以找出方程式中適應值為最小值，同時也為特性方程式的最佳解，因此分數階 PID 控制器參數即可快速的搜尋完成。

利用演算法求得控制器參數為目前常用的方法之一，但是需要注意所求得參數值是否為全域最佳化的解，因此在演算法中，我們加入積分誤差指標來增加解空間的嚴謹性。

### 五、倒單擺系統模擬

將單擺系統與一般頻率響應法所設計的 PID 控制器作閉迴路步階響應，得到圖 5.1 中頻率響應法設計控制器之步階響應圖，可看出系統逐漸發散，形成不穩定系統，因此頻率響應法不足以應付不穩定系統。因此本文中，即加入 PSO 演算法尋優分數階 PID 控制器，來控制極不穩定系統。

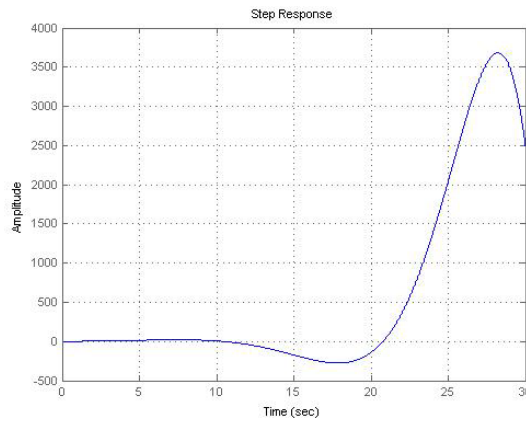


圖 5.1 頻率響應法設計控制器之步階響應圖

首先必須先建立分數整數階 PID 控制器的方塊圖，並且將分數階函數建立於方塊圖中以便進行分數階控制器模擬。如 Simulink 分數階 PID 方塊圖建立所示。

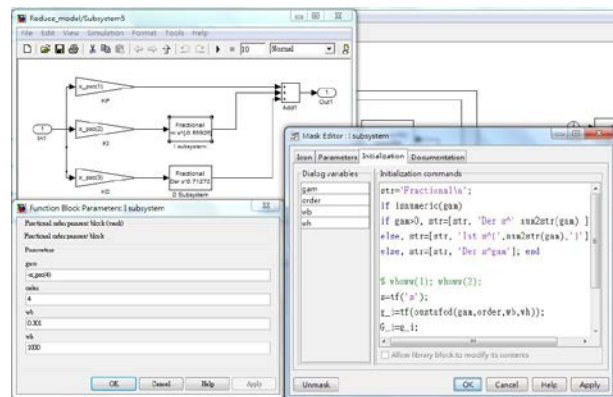


圖 5.2 Simulink 分數階 PID 方塊圖建立

再利用 Simulink 建構動態模型，並且將單擺物理參數代入其中，完成動態系統模型，如圖 5-3 所示。

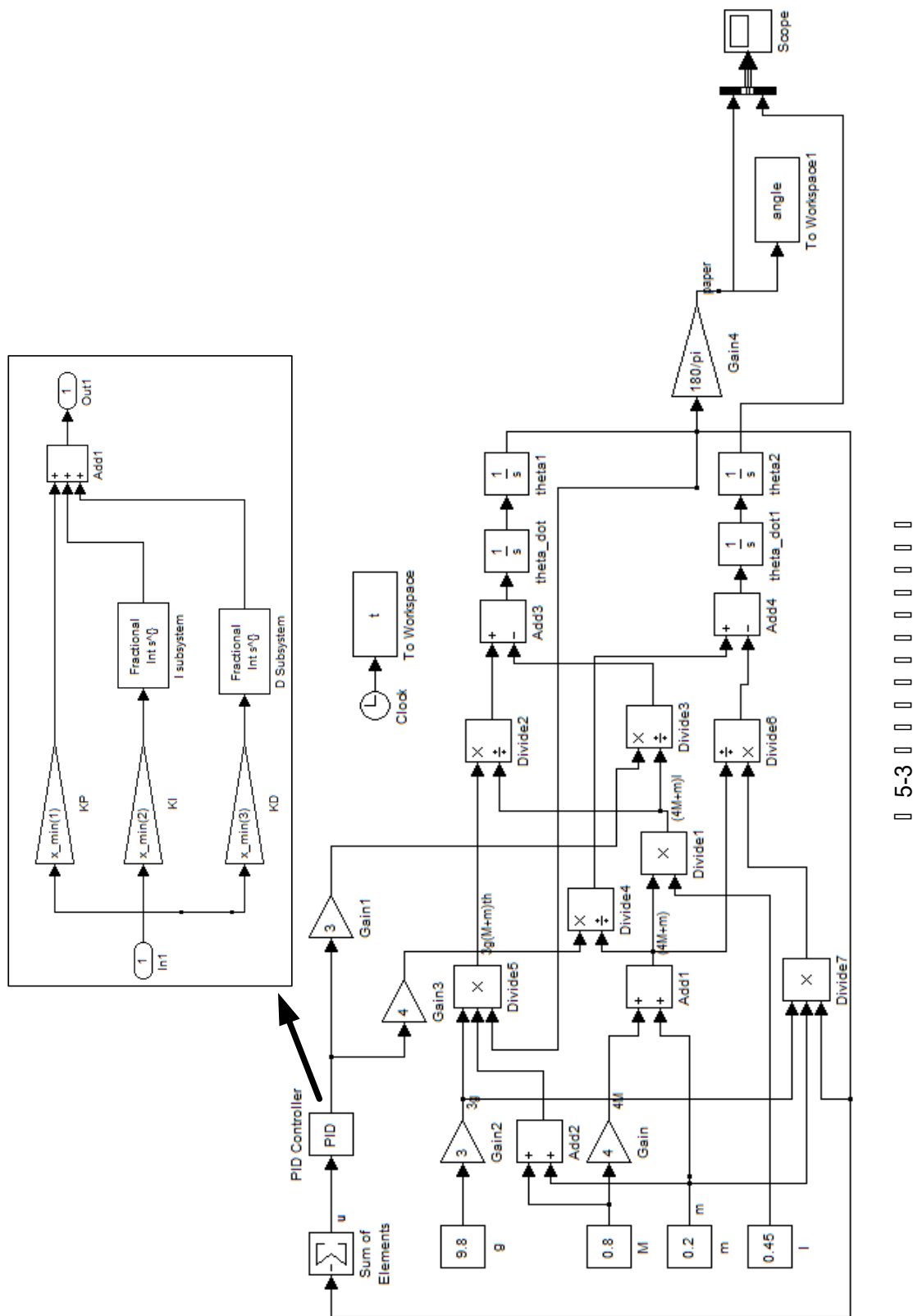


圖 5-3

利用 PSO 設計分數階 PID 控制器步驟，將積分次方項與微分次方項範圍設定在  $0 \leq \lambda \leq 1$ 、 $0 \leq \delta \leq 1$ ，進行搜尋，可得如下控制器。

$$G_{PID\_PSO\_Fractional} = -838.75 - \frac{855.23}{s^{0.5}} - 784.94s^{0.68}$$

其 PSO 演算法，最適解收斂狀況，如圖 5-4 所示。分數階 PID 控制器動態模擬中，於 6 秒處加入大小為初始訊號  $\frac{1}{5}$  的干擾，來鑑別控制器抗干擾的能力是否優越，圖 5-5 為初始角度 10 度之分數階 PID 控制器動態系統模擬圖。

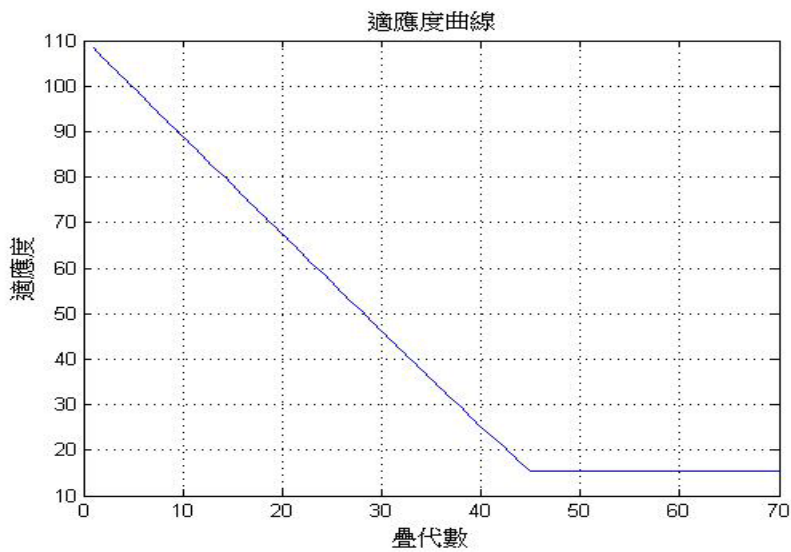


圖 5-4 PSO 適應解收斂圖

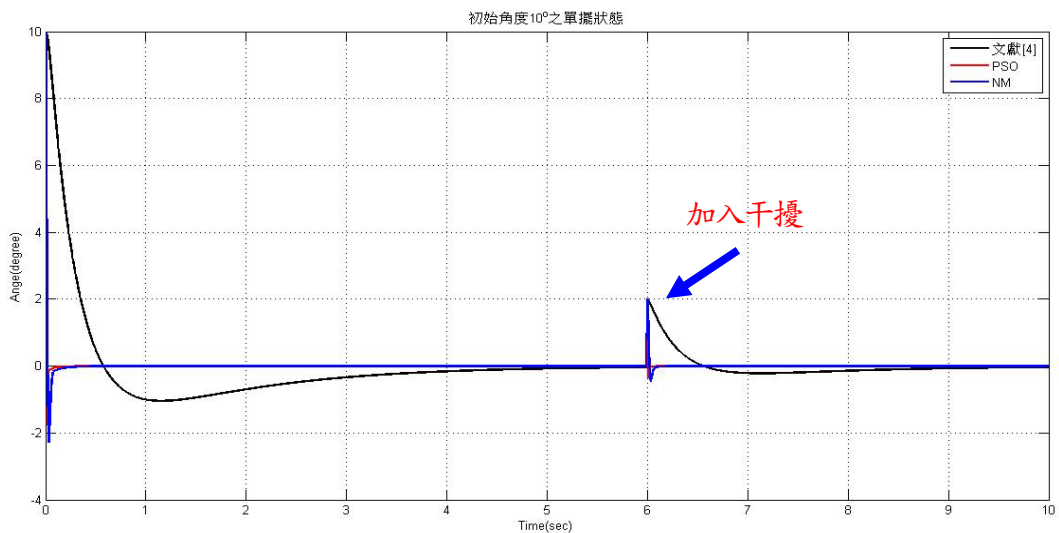


圖 5-5 初始角度 10 度之分數階 PID 控制器動態系統模擬圖

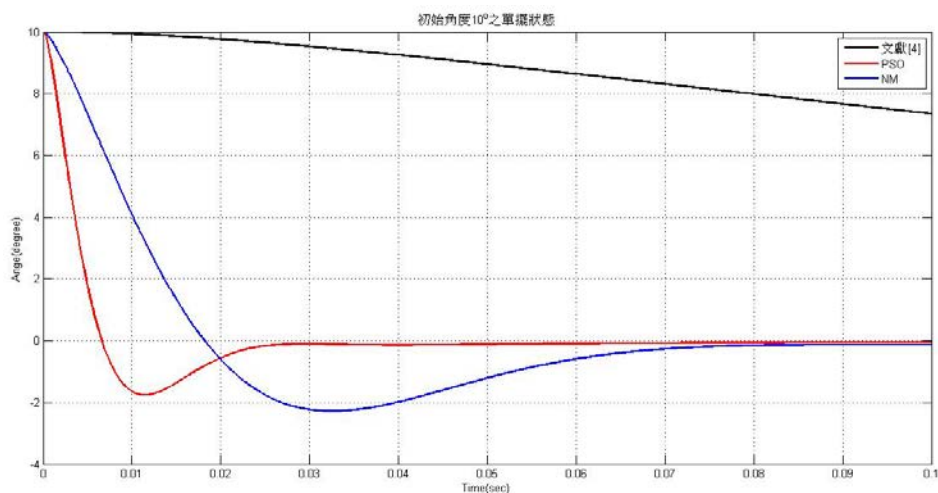


圖 5-6 初始角度 10 度之單擺直立狀態圖

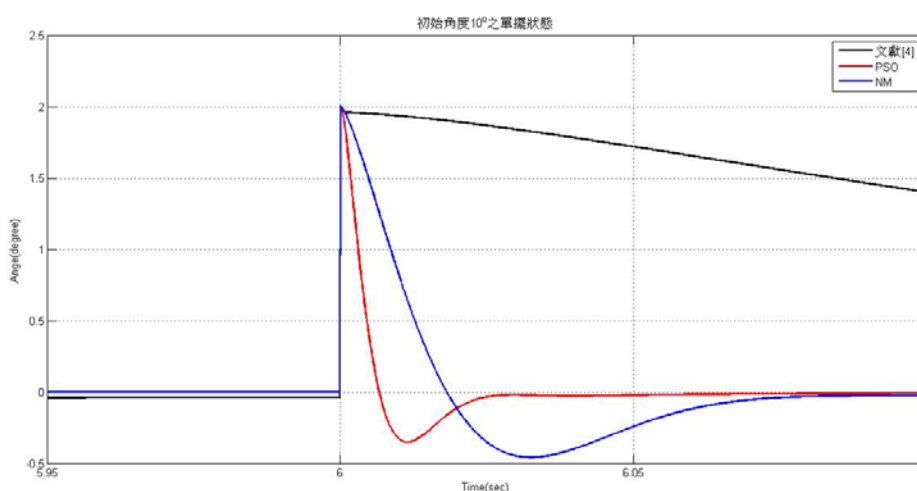


圖 5-7 抗干擾狀態圖

上述圖中，可發現利用 PSO 法所設定之分數階 PID 控制器，相較於文獻與 NM 最佳化演算法中更快速的收斂至穩定。可知本文所提出之分數階控制器之方式，具有高度優越性。

## 六、結論

本文以倒單擺系統為受控廠標的，設計分數階 PID 控制器，並利用粒子群最佳化演算法(PSO 法)與文獻中數值分析-單形法概念(NM 法)相比較，來尋找最佳化控制器參數 ( $K_p$ 、 $K_i$ 、 $K_d$ 、 $\lambda$ 、 $\delta$ )，並以軟體建模、模擬整數/分數階 PID 控制器對於導單擺系統進行比較，得到如下結論，分數階 PID 控制器具有五個維度空間，相較於整數階 PID 控制器僅有三個維度空間更具有調整彈性，使閉迴路系統更快滿足控制目標，為了解五個變數，先整理出閉迴路系統特性方程式，再透過粒子群演算法計算最小適應解，來滿

足系統要求。由模擬中顯示，以分數階 PID 控制器+PSO 演算法，為低階控制器且最有效率的設計組合。

## 七、文獻

- [1] 李珈松，“車輪式倒單擺平衡PID 控制”，國立台灣科技大學，碩士論文，2005。
- [2] 陳王強，“量化回饋理論之強韌控制應用於倒單擺”，國立台灣海洋大學，碩士論文，2004。
- [3] 林鈺翔，“雙連桿倒單擺系統用上與平衡控制”，國立成功大學，碩士論文，2002。
- [4] 吳國駿，“PID與狀態回授控制器應用於倒單擺系統之分析比較”，國立高雄應用科技大學，碩士論文，2003。
- [5] Xue, Dinyu, and YangQuan Chen, “A Comparative Introduction of Four Fractional Order Controllers”, The 4th World Congress on Intelligent Control and Automation, pp. 3288-3235, Shanghai, June 10-14, 2002.
- [6] Lanusse, P., T. Poinot, O. Cois, A. Oustaloup, and J.C. Trigeassou, “Tuning of an Active Suspension System using a Fractional Controller and a Closed-Loop Tuning”, The 11th International Conference on Advanced Robotics, Coimbra, Portugal, June 30-July 3, 2003.
- [7] Yu, Ker-Wei, and Zhi-Liang Huang, “LQ Regulator Design Based on Particle Swarm Optimization”, IEEE Conference on Systems, Man, and Cybernetics, pp. 4142-4145, Taipei, Taiwan, October 8-11, 2006
- [8] Hamidi, J., “Control System Design Using Particle Swarm Optimization (PSO)”, *International Journal of Soft Computing and Engineering (IJSCE)*, Volume-1, Issue-6, pp. 116-119. January, 2012.
- [9] Kesarkar, Ameya Anil, and N. Selvagesan, “Design of Fractional Order Robust Controller for Universal Plant Structure”, Institute of Technology, Nirma University, pp. 1-4, Ahmedabad, 8-10 December, 2011
- [10] Kesarkar, Ameya Anil, and N. Selvagesan, “Tuning of Robust  $PI^\alpha / PD^\alpha$  Controller for Generalized Plant Structure”, International Conference on Recent Advancements in Electrical, Electronics and Control Engineering, pp. 104-108, 2011.
- [11] 陳秉霖，2011，“應用群智慧於線上參數調整之PID控制器設計”，國立東華大學，碩士論文。
- [12] 郭信川，張建仁，劉清祥，2004，“粒子群演算法於最佳化問題之研究”，第一屆

- 台灣作業研究學會學術研討會暨科技與管理學術研討會，頁419-432。
- [13] 高一統，何怡偉，高逸瑋，2006，“整合Nelder-Mead單體法與粒子群體最佳化演算法之資料分群技術”，聖約翰學報，第二十五期，頁19-29。
- [14] Kuo, B. C., “Automatic Control Systems”, Seventh Edition, Prentice Hall, 1990.
- [15] 李志璋，“現代控制法則於倒單擺系統之用上直立及定位控制之研究”，大葉大學，碩士論文，2003。
- [16] Xue, Dinyu, Chunna Zhao, and YangQuan Chen, “A Modified Approximation Method of Fractional Order System”, The 2006 IEEE International Conference on Mechatronics and Automation, pp. 1043-1048, Luoyang, China, June 25-28, 2006.
- [17] Cao, Jun-yi, Jin Liang, and Bing-gang Cao, “Optimization of Fractional Order PID Controllers Based on Genetic Algorithms”, The Fourth International Conference on Machine Learning and Cybernetics, pp. 5686-5689, Guangzhou, China, 18-21 August, 2005.
- [18] YangQuan, Chen, “Ubiquitous Fractional Order Controls?”, *The Second IFAC Symposium on Fractional Derivatives and Applications (IFAC FDA06)*, 2006.
- [19] Xue, D. and Atherton D. P., “A suboptimal reduction algorithm for linear systems with a time delay”, *International Journal of Control*, 60(2):pp.181–196, 1994.
- [20] Xue, Dinyu, and YangQuan Chen, “Sub-Optimal  $H_2$  Rational Approximations To Fractional Order Linear Systems”, ASME International Design Engineering Technical Conferences & Computers and Information in Engineering Conference , pp. 1-10, Long Beach, California, September, 2010
- [21] Lagarias, J.C., J. A. Reeds, M. H. Wright, and P. E. Wright, "Convergence Properties of the Nelder-Mead Simplex Method in Low Dimensions," *SIAM Journal of Optimization*, Vol. 9 Number 1, pp. 112-147, 1998.
- [22] 陳慧芬，“具排班功能之公車系統模擬產生器的設計”，中原大學，碩士論文，2004。
- [23] 游鈴芃，“複合Nelder-Mead單純形與吸引排斥型粒子群最佳化演算法”，國立臺灣海洋大學，碩士論文，2004。
- [24] Spendley, W., G. R. Hext, and F. R. Himsworth. " Sequential Application of Simplex Designs in Optimization and Evolutionary Operation," *Technometrics* **4**, No. 4, pp. 441—461, 1962.

- [25] 汪信志，“細胞神經網路基於粒子群最佳演算法在影像邊緣偵測與雜訊消除上的應用”，國立高雄應用科技大學，碩士論文，2005。
- [26] Kennedy, J., and Eberhart, R. C., “Particles Swarm Optimization”, IEEE International Conference, pp.1942-1948, 1995.
- [27] 楊滄吉，“粒子群體最佳演算法應用於銀鹽沖洗系統”，國立高雄應用科技大學，碩士論文，2009。
- [28] Xue, Dinyu, and YangQuan Chen, “A fractional order PID tuning algorithm for a class of fractional order plants”, IEEE International conference On Mechatronics and Automation ICMA, pp. 216-221, Canada, July, 2005.
- [29] Deepyaman Maiti, Sagnik Biswas, and Amit Konar, “Design of a Fractional Order PID Controller Using Particle Swarm Optimization Technique”, The 2nd National Conference on Recent Trends in Information Systems, 2006.
- [30] Luo, Ying, Blas M. Vinagre, YangQuan Chen, Vicente Feliu, Patrick Lanusse, and Jocelyn Sabatier, “Tuning Fractional Order Proportional Integral Controllers for Fractional Order Systems”, *Journal of Process Control*, pp. 823-831, 2010.