

# 淺談高職生在指數函數的錯誤類型分析

郭侑玄

## 摘 要

本研究目的在討論高雄地區高職生在指數函數部份學習狀況，藉由學生的解題答案中，了解學生在指數函數方面的熟悉程度，讓大家更了解如何去更進一步學習。

關鍵詞：指數函數、指數函數錯誤類型分析、高雄地區指數函數

西諺云：「數學為科學之母。」，也就是說，數學是一切科學研究的基礎，更是發展高科技的必要條件。數學不只是學校的主科，更是我們日常生活中的一項重要技能。然而數學雖在各領域的重要性可見一斑，但無論國內、外都有研究報告指出，數學是中、小學生最感學習困難的科目之一。隨著年齡的增加，學到的數學知識越多、越廣，學生卻對數學越來越害怕、恐懼、與排斥。為了得到這些問題的解答，目前已有許多國內外的學者專家提出很多關於診斷學生學習困難的理論；大部分的學生在解數學題時，常常由於概念不清、推理無據、忽視條件、考慮不周等原因而把題解錯，這是因為學生在學習數學的過程中產生了錯誤觀念。而這些錯誤的觀念在學生的學習歷程中，扮演相當重要的角色。錯誤的答案將有助於學生更瞭解數學，當解題過程中有錯誤時，只要經由分析、研究其錯誤類型，就能瞭解其之所以會出錯的來龍去脈，使學習者明瞭在得到正確答案之前該具備哪些條件。可惜的是，並非每位學生都能自我檢視其錯誤原因，當然更不知應如何糾正自身錯誤。當學生存有錯誤觀念卻沒有設法改正，將會干擾學生後繼的學習，進而影響學生的成就。此時，若教師指導不及或糾正錯誤不得法，勢必影響學習成績。

Thorndike 提倡嘗試錯誤學習理論，主張人類和動物學習，經常是由盲目的嘗試錯誤過程，將錯誤的部分逐漸汰除，將有效的正確部分固定而保留。由此推論，學習者在持續且有效的訓練過程之下，固然導致學習者能精熟某些解題程序，但學習者所得的並非「因果式理解」（知其然又知其所以然），而是「機械式理解」（沒有理由的規則）。在此因果之下，多數學習者在學習數學時，只想快速獲得解題技巧、公式規則，卻不願意去理解問題背後的意義，以致於筆者發現很多學習者在學習數學時常是「硬做」，即是看到特定題型就開始自動化的解題，但問起題意卻語焉不詳。少了基本的概念學習，就算學習者把公式背得滾瓜爛熟，還是會發生誤用公式或者有公式卻不知如何使用於題目中的窘境。

Whitney (1985) 認為「學生不能理解數學在教什麼，而大人又錯誤判斷是學生努力不夠，要求他們不停的反覆練習，必將這些焦慮不安的孩子推入更大的危機」。筆者在教學經驗中發現，很多學生在數學這一科有著高努力卻低成就的困擾。在學習的過程中，大部分的學生常因在各單元中，其概念、計算與應用之解題過程犯了錯誤，自己無法修正，教師又不知情，以致無法在教學過程中適時地予以指導，使其在數學的學習過程中充滿挫折與無力感。Weiner 提出的自我歸因論則指出一旦經由努力卻很難或無法改變現況時，就會產生「習得無助感」。這種心理消極感結合對學習數學的畏懼感，會進而延展出厭惡數學的心態，進而開始放棄學習數學。

以認知心理學來說，解題發生困難可能是來自學生學習過程中的「迷失概念」所造成。因此成功診斷和補救教學第一步，即為錯誤分析。此外，Ashlock (1986) 和 Brown & Burto (1978) 也證實，分析學生解題的錯誤類型對師生兩者都是有幫助的。教學者透過學生在解題過程中的錯誤分析，從而在實施教學中修正自己的教學模式，避免使用易於讓學生產生混淆的教學方式，改採直接教學法以結構性的方式提出多方例證，澄清學習者常犯的系統性錯誤，讓學習者有機會學習如何發現錯誤，並明瞭是何種原因才會導致錯誤，伺機訓練其後設認知能力，好讓學習者在往後遇到相似情境能避免再次犯錯。

Schwarzenberger (1984) 認為在數學中，錯誤的地方和正確的答案同等重要，有時甚

至是過猶不及。因為錯誤並非憑空出現，而是其來有自，換言之，錯誤促發了數學的發展，它幫助學習者得以了解問題的來龍去脈，更可讓教學者將之視為診斷學生學習成效的輔助工具。教學者可藉由學生解題的過程，推測學生的內在心理認知程序模式，進而對症下藥。建構主義主張，知識是學習者透過學習過程中和教學者彼此互動，主動建構而來。對學生而言，發現學習過程中的錯誤可減少往後許多錯誤的產生，對老師而言，可利用學生錯誤的想法當作達成課程目標的指引。

指數應用範圍廣泛，舉凡數學中的微積分及複變數函數，人文社會中的人口問題、複利利息計算，自然科學中的化學元素半衰期問題、生物學的細胞分裂…等領域裡都可見到指數概念的推廣，但在教學實境中，仍有為數不少的學生在指數應用問題上有學習困難。事實上，學生對於“正整數指數”的概念，早在國中階段學習第一冊 1-1 節「質數與質因數分解」時，就有一些基本的概念。在學習第三冊 2-1 節「整數的乘除」及第四冊第一章「乘法公式與多項式」中，都陸續用到指數的記號，只是當時學習的重點並非在指數，因而未對指數的內容多加著墨。直到高職一年級下學期第二冊 2-1 節開始，才正式介紹“正整數指數”以及“指數律”。只要學生能提取先前的學習知識，理解自然數本身之特性，相信都能快速地掌握“正整數指數”之概念。可是在擴展“正整數指數”時，為了保持指數律之成立，因而推論得到“整數指數”之定義，此時學生就會對原先所建立的“正整數指數”概念發生衝突，使之不得不重新對“指數”要能有異於以往不同的觀點，因此在學習上出現困擾。

如果教學者能及早發現學生的困難及錯誤，及時找出犯錯的原因，就能儘快實施補救教學，適時改進教學上的缺失，降低學習者發生錯誤的機會。本研究便主要在了解高一生在指數函數單元之錯誤情形，並分析其產生錯誤的原因，希望透過錯誤概念的分析，以瞭解學生的錯誤類型究竟是由何種錯誤概念產生，如此教學時便能特別注意到學生學習困難之處，進而能夠設計良好的教學策略以改善教學成效，並修正學生錯誤的運算技能，做到教學前的預防及教學後的補救，如此相信必能使教學效果事半功倍。

就教學情境來看，大部分的學生之所以會產生學習困難源自於學生發展的概念模式常與科學理論模式相衝突。由於數學概念的產生常是多個連續抽象的結果，若在連續抽象的過程中，有某個概念錯失了，相對地就會影響後面的學習。再者學生多以感官知覺經驗來發展自己的概念模式，且很難修正已形成的迷失概念。於是，如果在學習過程中能以改變概念為學習內涵，再利用網路輔助教學提供概念改變的學習環境，讓學生有機會澄清模糊概念，或許能幫助學生建構正確的數學概念。

Sfard (1991) 認為抽象的數學是以兩種概念形式被理解，一是結構性概念，二是操作性概念。結構性概念是靜態的、同時性且整合的，而操作性概念是動態的、序列性且詳細的。大部分的學習者在學習數學的過程中都是先獲得操作性的概念，而想要將操作性概念轉換為結構性概念，則須再經過三個發展階段，才能把操作性概念轉化成可進一步運用的結構性概念。

- (一) 內化期 (interiorization)：指藉由操作較低層次具體物的過程中所獲得新的概念，在此階段中操作的技巧將會提升。所謂內化即是Piaget (1970) 所提出「內化是指能透過心智表徵運作，在分析或作比較時不需實際操作。」
- (二) 壓縮期 (condensation)：將繁瑣的操作過程壓縮成精簡可操作的單位，在此階段不

需考慮過程中的細節，而是將過程視為一個整體。此階段和其他過程結合、相互比較之後，進而化成較簡單的形式；此階段的發展會使不同表徵間的轉換變得更容易，重要的是經壓縮階段後的新概念才會確實產生。

- (三) 具體化 (reification)：內化及壓縮是漸進發生以及長期改變的結果，具體化則是將過程或概念凝聚為實體成為靜態的結構，此階段保有其特徵好提供其他概念做比較，並可用來當作更高層次概念內化階段的具體物，具體化與內化兩者是互生的關係，缺一不可；在此階段概念，各種表徵將可以被統一，此概念也不再依賴任何的形成過程，此階段在本體上是跳躍式的改變，這樣的改變有可能是突發的，不過對有些學生而言此一階段將不會發生。

綜觀國內外學者對於錯誤類型的分析結果如下：

一、Mayer (1985) 將學生的解題錯誤分成三類：

- 1.遺漏的錯誤 (omission error)：對命題不能完整回憶所造成的結果。
- 2.細節的錯誤 (specification error)：在陳述句中男已從一個變數轉換到另一個變數。
- 3.轉換的錯誤 (conversion error)：無法將關係句的形式轉換為陳述句的形式。

二、林清山、張景媛 (1994) 將學生容易發生的解題錯誤分四類：

- 1.問題轉換的錯誤：學生對於題目中的關鍵字詞無法充分了解、學生無法辨識問題中哪些是無用的條件，哪些是充分條件。
- 2.問題整合的錯誤：學生缺乏基本數學概念、學生無法知覺所計算出的答案是否合理、學生不會假設、學生只會套用固定的解題模式而不會因題型變化改變解題模式。
- 3.解題計畫及監控的錯誤概念：學生未能理解已知條件與未知條件之間的關係，導致發生假設與式子不合、無法隨問題類型改變解題策略、學生認為一個題目只會有一種解法、學生會受到前後題的影響而採用不當的解題策略。
- 4.解題執行的錯誤概念：學生在解方程式時會產生移項變號之錯誤，移項變號錯誤多半是因為學生缺乏恆等定理之概念、學生不習慣使用代入消去法解聯立方程式、學生在使用消去法時容易產生正負號混淆的情形。

三、秦麗花 (1995) 將學生解題錯誤分為四個層次：

- 1.缺少檢驗工作忽略答案合理性：沒寫答案、沒寫單位、單位寫錯、不知答案為何、省略步驟、抄寫錯誤。
- 2.執行計畫失誤，運算不熟練：基本運算不熟練、不懂借位運算、二種運算混淆、顧此失彼。
- 3.基本概念不清，盲目運算：缺少相關概念知識、不懂數學語言、迷失於關鍵字中、加所有的數字、無法辨別數據大小、無法辨別數據間的意義、只停留+ - 運算缺少 $\times \div$ 概念。
- 4.沒有解題能力及作答動機：不會閱讀、一知半解、畏懼作答。

四、錯解辨析(九章出版社 1995)此書裡把學生的錯誤類型分為：

- 1.由於概念不清產生的錯誤：  
包括概念實質模糊，混淆相似概念及循環定義概念等產生的錯誤。
- 2.由於推理無據產生的錯誤：

包含意造定理，濫用法則，循環論證，證據不足，及方法不對等產生的錯誤。

3.由於忽略條件產生的錯誤：

包含忽視概念中的隱含條件，忽視所使用的定理、公式、法則的適用條件，忽視取值範圍的變化，忽視約束條件中的隱含條件，忽視條件的充分性與必要性，錯誤理解條件，遺漏或濫加條件，忽視結論特徵中的隱含條件，以及把給定的一般條件特殊化等所產生的錯誤。

4.由於考慮不周產生的錯誤：

包含審題馬虎，形式套用，顧此失彼，忽視特例，以偏蓋全，及檢驗不當等產生的錯誤。

綜合以上所述，可發現學生在數學解題上所犯的錯誤大多有跡可循，包括：概念聯結的錯誤、問題轉換的錯誤、忽視條件的錯誤、運用錯誤的訊息等。此外，學生出錯的原因是在觀念不明之下想獲得答案，於是逕自發明屬於自己的解題方式。因此，教學者在教學過程中，應多詢問學習者在學習上有無問題，並鼓勵學生多方討論發言，從與學生的問題對答中發現錯誤，根據錯誤類型設計適當的補救教學，協助學生思考，幫助他們建立正確的概念。

蘇慧娟（1998）認為學生犯錯原因，包括缺乏概念或概念不正確、使用不當或錯誤規則、憑直覺或關鍵字做反應、先前觀念的固著、新知識與舊經驗做錯誤的連結或類推、知識間的干擾混淆、教師教學的影響等。

藍國華（2005）認為學生錯誤類型主要有：對定義及指數律的概念不清；受先前學習過的知識或本單元學習經驗的影響做錯誤的推論；代數與幾何之間，無法作連結；缺乏先備知識；忽略題目所給的條件、把給定的條件特殊化；受題目情境的設計、文字敘述及編排方式的影響；教學、口訣的影響；把題目的資料抄寫錯誤；粗心疏忽或明顯的計算錯誤；忽略、遺漏或誤加條件；憑直覺或關鍵字回答；不合邏輯的推論。

綜合以上所述，可推測學生發生錯誤的原因可能包括：先備知識的不足、使用錯誤的運算規則、將新知識與舊經驗做不當的聯結或錯誤的類推、缺乏概念或概念不正確、所習得的知識相互干擾、無法瞭解題意、計算錯誤等。本研究擬從學生在指數單元解題的過程中，分析學生的錯誤概念、運算時所使用的錯誤規則，探討學生之所以發生錯誤之原因。

本研究的實施步驟大略可分為六個階段：分別為準備資料、樣本選取、編製工具、試題修訂、正式施測及面談等階段。茲就各階段說明如下：

一、準備資料階段：研究者自擬定主題之後，便蒐集相關論文、期刊等文獻與資料，一方面參照各版本的用書與教師手冊、題庫與網路資料，另一方配合研究者本身的教學經驗，與校內教師的討論，分析學生容易犯錯的地方，再著手設計本研究之架構，擬定研究設計。

二、樣本選取階段：正式施測時，本研究的樣本為高雄地區的四所高職，每所高職抽取一個班級，合計 139 名高職一年級學生。

三、編製工具階段：本研究依實際需求，編製指數單元運算及應用測驗。編製時參考各版本教科用書與文獻參考資料，並和多位高職數學教師討論，希望藉由專家的角度，瞭解高職學生解指數概念問題時，容易犯錯的地方。藉由多樣化的資料蒐集製成初步的

試題，再參考調查問卷結果，經由與老師們的討論，增加、減少或修改，獲得預試試題。

四、**試題修正階段**：本研究進行一次預試。預試的主要目的在於瞭解測驗題目是否符合學生程度，測驗內容是否能有效的探測學生在處理指數概念相關問題時的錯誤情形，以及題意是否完整，刪除鑑別率偏低的題目，以決定正式測驗的題目內容。

五、**正式施測階段**：測驗的方法是以班級為單位，採取團測的方式進行，每次測驗均說明測驗之目的與作答注意事項。測驗時間以 50 鐘為原則。

六、**個別面談階段**：在紙筆測驗之後，研究者依學生答題的情形，從中選取具有錯誤內容，且有代表性的學生接受面談。為了能夠確實瞭解學生的解題方式與錯誤情況，除了詢問學生解題時的想法外，也會詢問類似題型學生的處理方法，以求證其解題策略。面談應在不被干擾的場所進行，並營造輕鬆和諧的氣氛，減低學生的焦慮以利面談的順利進行。面談以引導式的問話，期能清楚了解學生作答時的想法及思考歷程，以找出錯誤解題策略的原因，以便能收集完整的面談資料分析學生犯錯的原因。面談後，將所得的訊息併入資料分析中，讓本研究的錯誤類型分析能夠更詳實。

依據研究者所蒐集到的資料，並配合本研究的研究問題，分別進行討論與分析。以下共分為兩方面來呈現研究的結果。第一節統計整理學生在「指數單元運算及應用測驗」中的錯誤情形，第二節分析學生在「指數單元運算及應用測驗」中之錯誤類型與錯誤原因。

### 第一節 「指數單元運算及應用測驗」之錯誤情形分析

研究者利用「指數單元運算及應用測驗」進行調查學生在指數單元的學習情形，將學生測驗後的資料經過整理歸納後，找出主要錯誤情形，並統計出各題的錯誤人數、錯誤率、空白人數、空白率。學生錯誤情形統計表如表 4-1-1 所示。

表 4-1-1 學生錯誤情形統計表

試題	錯誤人數	錯誤率	空白人數	空白率
一、1	24	17.27%	2	8.33%
一、2	25	17.99%	4	16.00%
一、3	12	8.63%	3	25.00%
一、4	37	26.62%	16	43.24%
一、5	68	48.92%	40	58.82%
一、6	19	13.67%	6	31.58%
一、7	16	11.51%	5	31.25%
一、8	72	51.80%	48	66.67%
一、9	27	19.42%	7	25.93%
一、10	96	69.06%	67	69.79%

一、11	44	31.65%	15	34.09%
一、12	57	41.01%	33	57.89%
一、13	87	62.59%	41	47.13%
二、	73	52.52%	23	31.51%
三、1	50	35.97%	17	34.00%
三、2	27	19.42%	10	37.04%
三、3	70	50.36%	38	54.29%
四、1	50	35.97%	23	46.00%
四、2	86	61.87%	36	41.86%
五、1	76	54.68%	31	40.79%
五、2	51	36.69%	32	62.75%
六、1	89	64.03%	42	47.19%
六、2	107	76.98%	51	47.66%

說明：

1. 學生樣本數為 139 人。
2. 錯誤率是指錯誤人數佔總受試人數的比率；空白率是指空白人數佔錯誤人數的比率。
3. 錯誤率最高的是試題六、2：文字敘述的應用問題；錯誤率最低的是試題一、3：零指數 $(\sqrt{5}+1)^0$ 。
4. 空白率最高的試題是一、10： $\sqrt[5]{2^{20}} \cdot \sqrt[3]{\sqrt{2^{12}}} = \underline{\hspace{2cm}}$ ；空白率最低的試題是一、1： $2^{-2} \cdot (-3)^{-2} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

## 第二節 「指數單元運算及應用測驗」之錯誤類型與錯誤原因

本章的主要目的，在探討受試學生在「指數單元運算及應用測驗」中錯誤的情形，並輔助面談結果來分析其錯誤類型與錯誤原因。本測驗共有六大題 23 小題，每題皆分為三部分來討論。

### 一、試題分析

以每一大題為主，敘述測驗試題的設計目的，及所包含的主要內容。

### 二、結果分析

呈現每小題的答對人數、答錯人數、答對率、錯誤率及空白人數。

### 三、錯誤類型與原因分析

依照每小題統計與面談結果，歸納錯誤類型並分析其錯誤原因。

各試題分析情形如下：

一、第一大題：

(一) 試題分析：本大題設計的目的，主要是想瞭解學生對於指數基本概念清晰程度及指數律的使用狀況與錯誤原因。

(二) 結果分析：

表 4-2-1 第一大題學生答題情形統計表

題號	答對人數	錯誤人數	答對率	錯誤率	空白人數
1	115	24	82.73%	17.27%	2
2	114	25	82.01%	17.99%	4
3	127	12	91.37%	8.63%	3
4	102	37	73.38%	26.62%	16
5	71	68	51.08%	48.92%	40
6	120	19	86.33%	13.67%	6
7	123	16	88.49%	11.51%	5
8	67	72	48.20%	51.80%	48
9	112	27	80.58%	19.42%	7
10	43	96	30.94%	69.06%	67
11	95	44	68.35%	31.65%	15
12	82	57	58.99%	41.01%	33
13	52	87	37.41%	62.59%	41

(三) 錯誤類型與原因分析：

1. 試題一、1： $2^{-2} \cdot (-3)^{-2} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。答案： $\frac{1}{36}$

(1) 錯誤類型分析：

表 4-2-2 試題一、1 錯誤答案類型統計表

錯誤類型	錯誤答案	錯誤人數	佔總錯誤人數的百分比
1	1296, -24	7	29.17%
2	36, -36	6	25.00%

3	$\frac{1}{1296}$	3	12.50%
4	$-\frac{1}{36}$	2	8.33%
5	1	1	4.17%
6	$\frac{9}{4}$	1	4.17%
7	$\frac{1}{24}$	2	8.33%
8	空白	2	8.33%

(2) 由學生作答情形及面談資料分析錯誤原因如下：

①第一種錯誤類型為依現有數據拼湊答案，錯誤原因為缺乏指數概念，計算過程如下：

$$1. 2^{-2} \cdot (-3)^{-2} = (-6)^4 = 1296$$

$$2. 2^{-2} \cdot (-3)^{-2} = (-4) \times 6 = -24$$

②第二種錯誤類型是將  $a^{-1}$  誤用為  $-a$ ，錯誤原因為指數概念錯誤，計算過程如下：

$$1. 2^{-2} \cdot (-3)^{-2} = (-4) \times (-9) = 36$$

$$2. 2^{-2} \cdot (-3)^{-2} = (-6)^{-2} = -36$$

③第三種錯誤類型是將  $a^n \cdot b^n$  誤用為  $(ab)^{n+n}$ ，錯誤原因為指數律錯誤，計算過程如下：

$$2^{-2} \cdot (-3)^{-2} = (-6)^{-4} = \frac{1}{1296}$$

④第四種錯誤類型是將  $(-a)^n$  誤寫為  $-a^n$ ，錯誤原因為符號標示錯誤，計算過程如下：

$$2^{-2} \cdot (-3)^{-2} = -6^{-2} = -\frac{1}{36}$$

⑤第五種錯誤類型是將  $a^n \cdot (-b)^n$  誤用為  $(a-b)^n$ ，錯誤原因為指數概念錯誤，計算過程如下：

$$2^{-2} \cdot (-3)^{-2} = (-1)^{-2} = 1$$

⑥第六種錯誤類型為負負得正的誤用，錯誤原因為指數概念錯誤，計算過程如下：

$$2^{-2} \cdot (-3)^{-2} = \frac{1}{4} \times 9 = \frac{9}{4}$$

⑦第七種錯誤類型為計算錯誤，錯誤原因為粗心疏忽的漏失，計算過程如下：

$$2^{-2} \cdot (-3)^{-2} = \frac{1}{4} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{24}$$

2. 試題一、2： $\frac{a^{-3}}{a^{-4}} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。答案： $a$

(1) 錯誤類型分析：

表 4-2-3 試題一、2 錯誤答案類型統計表

錯誤類型	錯誤答案	錯誤人數	佔總錯誤人數的百分比
1	$\frac{1}{a^7}$	8	32.00%
2	$\frac{1}{a}$	1	4.00%
3	$a^2$	1	4.00%
4	$\frac{3}{a^4}$	6	24.00%
5	$\frac{a-1}{a^4}$	2	8.00%
6	$a^{-5}$	3	12.00%
7	空白	4	16.00%

(2) 由學生作答情形及面談資料分析錯誤原因如下：

①第一種錯誤類型為遺漏負號，錯誤原因為粗心疏忽的漏失，計算過程如下：

$$\frac{a^{-3}}{a^{-4}} = a^{-3-4} = a^{-7} = \frac{1}{a^7}$$

②第二種錯誤類型為計算錯誤，錯誤原因為粗心疏忽的漏失，計算過程如下：

$$\frac{a^{-3}}{a^{-4}} = \frac{a^3}{1} = \frac{1}{a}$$

③第三種錯誤類型為誤植題目，錯誤原因為粗心疏忽的漏失，計算過程如下：

$$\frac{a^{-2}}{a^{-4}} = a^{-2-(-4)} = a^2$$

④第四種錯誤類型為依現有數據拼湊答案，錯誤原因為缺乏指數概念，計算過程

如下：

$$\frac{a^{-3}}{a^{-4}} = a^{-\frac{3}{4}} = a^{\frac{3}{4}}$$

⑤第五種錯誤類型為計算錯誤，錯誤原因為粗心疏忽的漏失，計算過程如下：

$$\frac{a^{-3}}{a^{-4}} = a^{-3} - a^{-4} = \frac{1}{a^3} - \frac{1}{a^4} = \frac{a-1}{a^4}$$

⑥第六種錯誤類型是將  $\frac{a^m}{a^n}$  誤用為  $a^m - a^n$ ，錯誤原因為指數律錯誤，計算過程如下：

$$\frac{a^{-3}}{a^{-4}} = a^{-5} \text{ (由於分子是 } a^{-3} \text{ 分母是 } a^{-4} \text{ 故猜測答案為 } a^{-5} \text{)}$$

3. 試題一、3： $(\sqrt{5}+1)^0 = \underline{\hspace{2cm}}$ 。答案：1

(1) 錯誤類型分析：

表 4-2-4 試題一、3 錯誤答案類型統計表

錯誤類型	錯誤答案	錯誤人數	佔總錯誤人數的百分比
1	0	7	58.33%
2	6	2	16.67%
3	空白	3	25.00%

(2) 由學生作答情形及面談資料分析錯誤原因如下：

①第一種錯誤類型是將  $a^0$  誤認為 0，錯誤原因為指數概念錯誤，計算過程如下：

$$(\sqrt{5}+1)^0 = 0$$

②第二種錯誤類型為依現有數據拼湊答案，錯誤原因為缺乏指數概念，計算過程如下：

$$(\sqrt{5}+1)^0 = 5+1=6$$

4. 試題一、4： $[(\sqrt{3})^{\frac{1}{5}}]^{-10} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。答案： $\frac{1}{3}$

(1) 錯誤類型分析：

表 4-2-5 試題一、4 錯誤答案類型統計表

錯誤類型	錯誤答案	錯誤人數	佔總錯誤人數的百分比
1	$\frac{1}{9}, \frac{1}{2}$	3	8.11%
2	-3	5	13.51%
3	$(\sqrt{3})^{-2}$	9	24.32%
4	$3^{-4}$	4	10.81%
5	空白	16	43.24%

(2) 由學生作答情形及面談資料分析錯誤原因如下：

①第一種錯誤類型為筆誤或誤植題目，錯誤原因為粗心疏忽的漏失，計算過程如下：

$$1. [(\sqrt{3})^5]^{-10} = (\sqrt{3})^{-2} = \frac{1}{9}$$

$$2. [(\sqrt{3})^5]^{-10} = [(\sqrt{2})^5]^{-10} = (2^{\frac{1}{10}})^{-10} = 2^{-1} = \frac{1}{2}$$

②第二種錯誤類型是將  $a^{-1}$  誤用為  $-a$ ，錯誤原因為指數概念錯誤，計算過程如下：

$$[(\sqrt{3})^5]^{-10} = (\sqrt{3})^{-2} = -3$$

③第三種錯誤類型為未化簡，錯誤原因為指數概念錯誤，計算過程如下：

$$[(\sqrt{3})^5]^{-10} = (\sqrt{3})^{-2}$$

④第四種錯誤類型是將  $(\sqrt{a})^m$  誤用為  $a^{\frac{m}{2}}$ ，錯誤原因為指數概念錯誤，計算過程如下：

$$[(\sqrt{3})^5]^{-10} = (3^{\frac{5}{2}})^{-10} = 3^{-4}$$

$$5. \text{ 試題一、5: } (4 + \sqrt{7})^{\frac{3}{2}} (4 - \sqrt{7})^{\frac{3}{2}} = \underline{\hspace{2cm}}。 \text{ 答案: } 27$$

(1) 錯誤類型分析：

表 4-2-6 試題一、5 錯誤答案類型統計表

錯誤類型	錯誤答案	錯誤人數	佔總錯誤人數的百分比
1	$\pm 27$	9	13.24%
2	$64 - 7\sqrt{7}$	16	23.53%
3	243	3	4.41%
4	空白	40	58.82%

(2) 由學生作答情形及面談資料分析錯誤原因如下：

①第一種錯誤類型是將  $a^{\frac{1}{2}}$  誤認為  $\pm\sqrt{a}$ ，錯誤原因為指數概念錯誤，計算過程如下：

$$(4 + \sqrt{7})^{\frac{3}{2}} (4 - \sqrt{7})^{\frac{3}{2}} = [(4 + \sqrt{7})(4 - \sqrt{7})]^{\frac{3}{2}} = 9^{\frac{3}{2}} = \pm 27$$

②第二種錯誤類型是將  $(a-b)^n$  誤用為  $a^n - b^n$ ，錯誤原因為平方差公式運用錯誤，

計算過程如下：

$$(4 + \sqrt{7})^{\frac{3}{2}} (4 - \sqrt{7})^{\frac{3}{2}} = [(4 + \sqrt{7})(4 - \sqrt{7})]^{\frac{3}{2}} = (4^2 - \sqrt{7}^2)^{\frac{3}{2}}$$

$$= 4^3 - \sqrt{7}^3 = 64 - 7\sqrt{7}$$

③第三種錯誤類型為誤植題目，錯誤原因為粗心疏忽的漏失，計算過程如下：

$$(4 + \sqrt{7})^{\frac{3}{2}} (4 - \sqrt{7})^{\frac{3}{2}} = (4 + \sqrt{7})^{\frac{5}{2}} (4 - \sqrt{7})^{\frac{5}{2}} = [(4 + \sqrt{7})(4 - \sqrt{7})]^{\frac{5}{2}} = 9^{\frac{5}{2}} = 234$$

6. 試題一、6： $b \neq 0$ ， $(b^3 \cdot (b^2)^{-3})^{-1} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。答案： $b^3$

(1) 錯誤類型分析：

表 4-2-7 試題一、6 錯誤答案類型統計表

錯誤類型	錯誤答案	錯誤人數	佔總錯誤人數的百分比
1	1	3	15.79%
2	18	6	31.58%
3	$b^{18}$	1	5.26%
4	$b$	2	10.53%
5	3	1	5.26%
6	空白	6	31.58%

(2) 由學生作答情形及面談資料分析錯誤原因如下：

①第一種錯誤類型是將文字符號任意代值化為數字，錯誤原因為文字符號概念模糊，計算過程如下：

$$b = 1 \text{ 代入，} (b^3 \cdot (b^2)^{-3})^{-1} = (1^3 \cdot (1^2)^{-3})^{-1} = 1$$

②第二種錯誤類型為依現有數據拼湊答案，錯誤原因為缺乏指數概念，計算過程如下：

$$(b^3 \cdot (b^2)^{-3})^{-1} = 3 \times 2 \times (-3) \times (-1) = 18$$

③第三種錯誤類型是將  $a^m \cdot a^n$  誤用為  $a^{m \times n}$ ，錯誤原因為指數律錯誤，計算過程如下：

$$(b^3 \cdot (b^2)^{-3})^{-1} = (b^3 \cdot b^{-6})^{-1} = (b^{-18})^{-1} = b^{18}$$

④第四種錯誤類型是將  $(a^m)^{-n}$  誤用為  $a^{m-n}$ ，錯誤原因為指數律錯誤，計算過程如下：

$$(b^3 \cdot (b^2)^{-3})^{-1} = (b^3 \cdot b^{-1})^{-1} = (b^2)^{-1} = b$$

⑤第五種錯誤類型為學生認為答案應該是數字，錯誤原因為文字符號概念模糊，計算過程如下：

$$(b^3 \cdot (b^2)^{-3})^{-1} = (b^3 \cdot b^{-6})^{-1} = (b^{-3})^{-1} = b^3 = 3$$

7. 試題一、7： $125^{-\frac{1}{3}} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。答案： $\frac{1}{5}$

(1) 錯誤類型分析：

表 4-2-8 試題一、7 錯誤答案類型統計表

錯誤類型	錯誤答案	錯誤人數	佔總錯誤人數的百分比
1	5	3	18.75%
2	$-\frac{125}{3}, \frac{1}{375}, \frac{125}{3}$	6	37.50%
3	-5	2	12.50%
4	空白	5	31.25%

(2) 由學生作答情形及面談資料分析錯誤原因如下：

①第一種錯誤類型為誤植題目，錯誤原因為粗心疏忽的漏失，計算過程如下：

$$125^{-\frac{1}{3}} = (5^3)^{\frac{1}{3}} = 5$$

②第二種錯誤類型為依現有數據拼湊答案，錯誤原因為缺乏指數概念，計算過程如下：

$$1. \quad 125^{-\frac{1}{3}} = 125 \times \left(-\frac{1}{3}\right) = -\frac{125}{3}$$

$$2. \quad 125^{-\frac{1}{3}} = \left(\frac{1}{125}\right)^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{125} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{375}$$

$$3. \quad 125^{-\frac{1}{3}} = 125 \times \frac{1}{3} = \frac{125}{3}$$

③第三種錯誤類型為未完成作答，錯誤原因為粗心疏忽的漏失，計算過程如下：

$$125^{-\frac{1}{3}} = (5^3)^{-\frac{1}{3}} = -5$$

8. 試題一、8： $(0.027)^{-\frac{2}{3}} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。答案： $\frac{100}{9}$

(1) 錯誤類型分析：

表 4-2-9 試題一、8 錯誤答案類型統計表

錯誤類型	錯誤答案	錯誤人數	佔總錯誤人數的百分比
1	$-0.018, \frac{2000}{81}$	15	20.83%
2	$0.6, \frac{9}{100}$	6	8.33%

3	72900	3	4.17%
4	空白	48	66.67%

(2) 由學生作答情形及面談資料分析錯誤原因如下：

①第一種錯誤類型為依現有數據拼湊答案，錯誤原因為缺乏指數概念，計算過程如下：

$$1. (0.027)^{-\frac{2}{3}} = 0.027 \times \left(-\frac{2}{3}\right) = -0.018$$

$$2. (0.027)^{-\frac{2}{3}} = \left(\frac{1000}{27}\right)^{\frac{2}{3}} = \frac{1000}{27} \times \frac{2}{3} = \frac{2000}{81}$$

②第二種錯誤類型為筆誤，錯誤原因為粗心疏忽的漏失，計算過程如下：

$$1. (0.027)^{-\frac{2}{3}} = ((0.3)^{-3})^{-\frac{2}{3}} = (0.3)^2 = 0.6$$

$$2. (0.027)^{-\frac{2}{3}} = \left(\left(\frac{3}{10}\right)^3\right)^{\frac{2}{3}} = \left(\frac{3}{10}\right)^2 = \frac{9}{100}$$

③第三種錯誤類型是將  $(ab^n)^{\frac{1}{n}}$  誤用為  $ab$ ，錯誤原因為指數律錯誤，計算過程如下：

$$(0.027)^{-\frac{2}{3}} = (27 \cdot 10^{-3})^{-\frac{2}{3}} = (27 \cdot 10)^2 = 72900$$

$$9. \text{ 試題一、9: } 2^{1.4} \times 2^{1.2} \div 2^{0.6} = \underline{\hspace{2cm}}。 \text{ 答案：4}$$

(1) 錯誤類型分析：

表 4-2-10 試題一、9 錯誤答案類型統計表

錯誤類型	錯誤答案	錯誤人數	佔總錯誤人數的百分比
1	$2^{2.8}$	6	22.22%
2	5.6	9	33.33%
3	2	3	11.11%
4	2	2	7.41%
5	空白	7	25.93%

(2) 由學生作答情形及面談資料分析錯誤原因如下：

①第一種錯誤類型是將  $a^m \cdot a^n$  誤用為  $a^{m \times n}$ ，錯誤原因為指數律錯誤，計算過程如下：

$$2^{1.4} \times 2^{1.2} \div 2^{0.6} = 2^{1.4 \times 1.2 \div 0.6} = 2^{2.8}$$

②第二種錯誤類型為依現有數據拼湊答案，錯誤原因為缺乏指數概念，計算過程如下：

$$2^{1.4} \times 2^{1.2} \div 2^{0.6} = 2.8 \times 2.4 \div 1.2 = 5.6$$

③第三種錯誤類型為未完成作答，錯誤原因為粗心疏忽的漏失，計算過程如下：

$$2^{1.4} \times 2^{1.2} \div 2^{0.6} = 1.4 + 1.2 - 0.6 = 2$$

④第四種錯誤類型為計算錯誤，錯誤原因為粗心疏忽的漏失，計算過程如下：

$$2^{1.4} \times 2^{1.2} \div 2^{0.6} = 2^{1.4+1.2-0.6} = 2^1 = 2$$

10. 試題一、10： $\sqrt[5]{2^{20}} \cdot \sqrt[3]{\sqrt{2^{12}}} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。答案：64

(1) 錯誤類型分析：

表 4-2-11 試題一、10 錯誤答案類型統計表

錯誤類型	錯誤答案	錯誤人數	佔總錯誤人數的百分比
1	256	15	15.63%
2	$2^{22}$	2	2.08%
3	$2^{59}$	6	6.25%
4	$2^{\frac{9}{2}}$	4	4.17%
5	62	2	2.08%
6	空白	67	69.79%

(2) 由學生作答情形及面談資料分析錯誤原因如下：

①第一種錯誤類型為是將  $a^m \cdot a^n$  誤用為  $a^{m \times n}$ ，錯誤原因為指數律錯誤，計算過程如下：

$$\sqrt[5]{2^{20}} \cdot \sqrt[3]{\sqrt{2^{12}}} = (2^{20})^{\frac{1}{5}} \cdot ((2^{12})^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{3}} = 2^4 \cdot 2^2 = 2^8 = 256$$

②第二種錯誤類型是將  $\sqrt[n]{a^m}$  誤用為  $a^{m-n}$ ，錯誤原因為指數概念錯誤，計算過程如下：

$$\sqrt[5]{2^{20}} \cdot \sqrt[3]{\sqrt{2^{12}}} = 2^{15} \cdot \sqrt[3]{2^{10}} = 2^{15} \cdot 2^7 = 2^{22}$$

③第三種錯誤類型是將  $\sqrt[n]{a}$  誤認為  $a^{\frac{m}{n}}$ ，錯誤原因為指數概念錯誤，計算過程如下：

$$\sqrt[5]{2^{20}} \cdot \sqrt[3]{\sqrt{2^{12}}} = (2^{20})^{\frac{5}{2}} \cdot (2^{\frac{12}{2}})^{\frac{3}{2}} = 2^{50} \cdot 2^9 = 2^{59}$$

④第四種錯誤類型是將 $\sqrt[m]{a^n}$ 誤認為 $a^{\frac{m}{n}}$ ，錯誤原因為指數概念錯誤，計算過程如下：

$$\sqrt[5]{2^{20}} \cdot \sqrt[3]{\sqrt{2^{12}}} = 2^{\frac{5}{20}} \cdot \sqrt[3]{2^{\frac{2}{12}}} = 2^{\frac{1}{4}} \cdot 2^{\frac{1}{6}} = 2^{\frac{9}{12}} = 2^{\frac{3}{4}}$$

⑤第五種錯誤類型為計算錯誤，錯誤原因為粗心疏忽的漏失，計算過程如下：

$$\sqrt[5]{2^{20}} \cdot \sqrt[3]{\sqrt{2^{12}}} = (2^{20})^{\frac{1}{5}} \cdot ((2^{12})^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{3}} = 2^4 \cdot 2^2 = 2^6 = 64$$

11. 試題一、11：  $b > 0$ ， $\frac{b^{\frac{4}{3}} \cdot 3^{\frac{1}{2}}}{b^{\frac{1}{3}} \cdot 3^{-\frac{1}{2}}} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。答案：  $3b$

(1) 錯誤類型分析：

表 4-2-12 試題一、11 錯誤答案類型統計表

錯誤類型	錯誤答案	錯誤人數	佔總錯誤人數的百分比
1	$b^2$	13	29.55%
2	$9, 3$	3	6.82%
3	$b$	6	13.64%
4	$\frac{b^4}{3}$	4	9.09%
5	-11	3	6.82%
6	空白	15	34.09%

(2) 由學生作答情形及面談資料分析錯誤原因如下：

①第一種錯誤類型是將 $a^m \cdot b^n$ 誤認為 $a^{m+n}$ ，錯誤原因為指數律錯誤，計算過程如下：

$$\frac{b^{\frac{4}{3}} \cdot 3^{\frac{1}{2}}}{b^{\frac{1}{3}} \cdot 3^{-\frac{1}{2}}} = b^{\frac{4}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{3}} \cdot 3^{(-\frac{1}{2}) - (-\frac{1}{2})} = b^2$$

②第二種錯誤類型是將文字符號任意代值化為數字，錯誤原因為文字符號概念模糊，計算過程如下：

1.  $b = 3$  代入， $\frac{b^{\frac{4}{3}} \cdot 3^{\frac{1}{2}}}{b^{\frac{1}{3}} \cdot 3^{-\frac{1}{2}}} = \frac{3^{\frac{4}{3}} \cdot 3^{\frac{1}{2}}}{3^{\frac{1}{3}} \cdot 3^{-\frac{1}{2}}} = 3^{\frac{4}{3} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - (-\frac{1}{2})} = 3^2 = 9$

2.  $b = 1$  代入， $\frac{b^{\frac{4}{3}} \cdot 3^{\frac{1}{2}}}{b^{\frac{1}{3}} \cdot 3^{-\frac{1}{2}}} = \frac{1^{\frac{4}{3}} \cdot 3^{\frac{1}{2}}}{1^{\frac{1}{3}} \cdot 3^{-\frac{1}{2}}} = 3$

③第三種錯誤類型為遺漏負號，錯誤原因為粗心疏忽的漏失，計算過程如下：

$$\frac{b^{\frac{4}{3}} \cdot 3^{\frac{1}{2}}}{b^{\frac{1}{3}} \cdot 3^{-\frac{1}{2}}} = b^{\frac{4}{3} - \frac{1}{3}} \times 3^{\frac{1}{2} - (-\frac{1}{2})} = b \times 1 = b$$

④第四種錯誤類型是將  $\frac{a^m}{a^n}$  誤用為  $a^{\frac{m}{n}}$ ，錯誤原因為指數律錯誤，計算過程如下：

$$\frac{b^{\frac{4}{3}} \cdot 3^{\frac{1}{2}}}{b^{\frac{1}{3}} \cdot 3^{-\frac{1}{2}}} = b^4 \times 3^{-1} = \frac{b^4}{3}$$

⑤第五種錯誤類型依現有數據拼湊答案，錯誤原因為缺乏指數概念，計算過程如下：

$$\frac{b^{\frac{4}{3}} \cdot 3^{\frac{1}{2}}}{b^{\frac{1}{3}} \cdot 3^{-\frac{1}{2}}} = \frac{\frac{4}{3} + \frac{1}{2}}{\frac{1}{3} - \frac{1}{2}} = -11$$

12. 試題一、12： $(\frac{25}{16})^{-0.25} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。答案： $\frac{2}{\sqrt{5}}$

(1) 錯誤類型分析：

表 4-2-13 試題一、12 錯誤答案類型統計表

錯誤類型	錯誤答案	錯誤人數	佔總錯誤人數的百分比
1	$\frac{4}{5}$	7	12.28%
2	$\sqrt{2}$	4	7.02%
3	$-\frac{625}{16}$	13	22.81%
4	空白	33	57.89%

(2) 由學生作答情形及面談資料分析錯誤原因如下：

①第一種錯誤類型為錯誤約分，錯誤原因為指數律錯誤，計算過程如下：

$$\left(\frac{25}{16}\right)^{-0.25} = \left(\frac{5^2}{4^2}\right)^{-\frac{1}{4}} = \left(\frac{5}{4}\right)^{-1} = \frac{4}{5}$$

②第二種錯誤類型為誤植題目，錯誤原因為粗心疏忽的漏失，計算過程如下：

$$\left(\frac{25}{16}\right)^{-0.25} = \left(\frac{2^2}{4^2}\right)^{-\frac{1}{4}} = \left(\frac{1}{2}\right)^{-\frac{1}{2}} = \sqrt{2}$$

③第三種錯誤類型為依現有數據拼湊答案，錯誤原因為缺乏指數概念，計算過程如下：

$$\left(\frac{25}{16}\right)^{-0.25} = \frac{25}{16} \times (-0.25) = -\frac{625}{16}$$

13. 試題一、13： $(0.25)^{-2.5} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。答案：32

(1) 錯誤類型分析：

表 4-2-14 試題一、13 錯誤答案類型統計表

錯誤類型	錯誤答案	錯誤人數	佔總錯誤人數的百分比
1	$\frac{1}{32}$ ，8	7	8.05%
2	$-\frac{1}{32}$	15	17.24%
3	-0.625，10	24	31.03%
4	空白	41	47.13%

(2) 由學生作答情形及面談資料分析錯誤原因如下：

①第一種錯誤類型為筆誤，錯誤原因為粗心疏忽的漏失，計算過程如下：

$$1. (0.25)^{-2.5} = \left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{5}{2}} = \frac{1}{32}$$

$$2. (0.25)^{-2.5} = \left(\frac{1}{4}\right)^{-\frac{3}{2}} = 2^3 = 8$$

②第二種錯誤類型是將  $a^{-1}$  誤用為  $-a$ ，錯誤原因為指數概念錯誤，計算過程如下：

$$(0.25)^{-2.5} = \left(\left(\frac{1}{2}\right)^2\right)^{-\frac{5}{2}} = \left(\frac{1}{2}\right)^{-5} = -\frac{1}{32}$$

③第三種錯誤類型為依現有數據拼湊答案，錯誤原因為缺乏指數概念，計算過程如下：

$$1. (0.25)^{-2.5} = 0.25 \times (-2.5) = -0.625$$

$$2. (0.25)^{-2.5} = \frac{100}{25} \times 2.5 = 10$$

二、第二大題：

(一) 試題分析

本大題設計的目的，主要是想研究學生是否瞭解指數函數圖形的單調性，及面對比較大小類型所使用的策略及方法，並探討其錯誤原因。

(二) 結果分析：

表 4-2-15 第二大題學生答題情形統計表

答對人數	錯誤人數	答對率	錯誤率	空白人數
66	73	47.48%	52.52%	23

## (三) 錯誤類型與原因分析：

1. 試題二、 $(0.2)^{1.2}$ 、 $(0.2)^{0.2}$ 、 $(0.2)^{-0.2}$ 、 $\sqrt{0.2}$  與 1 的大小關係

為\_\_\_\_\_。 答案： $(0.2)^{1.2} < \sqrt{0.2} < (0.2)^{0.2} < 1 < (0.2)^{-0.2}$

## (1) 錯誤類型分析：

表 4-2-16 試題二、1 錯誤答案類型統計表

錯誤類型	錯誤答案	錯誤人數	佔總錯誤人數的百分比
1	$(0.2)^{1.2} > \sqrt{0.2} > (0.2)^{0.2} > 1 > (0.2)^{-0.2}$	8	10.96%
2	$(0.2)^{1.2} < 1 < \sqrt{0.2} < (0.2)^{0.2} < (0.2)^{-0.2}$ $(0.2)^{1.2} < \sqrt{0.2} < (0.2)^{0.2} < (0.2)^{-0.2} < 1$	10	13.70%
3	$(0.2)^{1.2} > 1 > \sqrt{0.2} > (0.2)^{0.2} > (0.2)^{-0.2}$ $1 > (0.2)^{1.2} > \sqrt{0.2} > (0.2)^{0.2} > (0.2)^{-0.2}$	14	19.18%
4	$(0.2)^{1.2} < (0.2)^{0.2} < \sqrt{0.2} < (0.2)^{-0.2} < 1$	5	6.85%
5	其他	13	17.81%
6	空白	23	31.51%

## (2) 由學生作答情形及面談資料分析錯誤原因如下：

①第一種錯誤類型為未注意底數比 1 小，錯誤原因為指數函數概念錯誤，計算過程如下：

$$(0.2)^{1.2}、(0.2)^{1.2}、(0.2)^{-0.2}、\sqrt{0.2} \text{ 與 } 1$$

$$\Rightarrow (0.2)^{1.2}、(0.2)^{1.2}、(0.2)^{-0.2}、(0.2)^{0.5} \text{ 與 } (0.2)^0$$

$$\text{又 } 1.2 > 0.5 > 0.2 > 0 > -0.2$$

$$\Rightarrow (0.2)^{1.2} > \sqrt{0.2} > (0.2)^{0.2} > 1 > (0.2)^{-0.2}$$

②第二種錯誤類型為不知道 1 為除了 0 之外任何數的 0 次方，錯誤原因為指數概念不清楚，計算過程如下：

$$1. (0.2)^{1.2}、(0.2)^{1.2}、(0.2)^{-0.2}、\sqrt{0.2} \text{ 與 } 1$$

$$\Rightarrow (0.2)^{1.2}、(0.2)^{1.2}、(0.2)^{-0.2}、(0.2)^{0.5} \text{ 與 } 1$$

又  $1.2 > 1 > 0.5 > 0.2 > -0.2$

$$\Rightarrow (0.2)^{1.2} < 1 < \sqrt{0.2} < (0.2)^{0.2} < (0.2)^{-0.2}$$

2.  $(0.2)^{1.2}、(0.2)^{1.2}、(0.2)^{-0.2}、\sqrt{0.2}$  與 1

$$\Rightarrow (0.2)^{1.2}、(0.2)^{1.2}、(0.2)^{-0.2}、(0.2)^{0.5} \text{ 與 } 1$$

又  $1.2 > 0.5 > 0.2 > -0.2$  且  $1 > 0.2$

$$\Rightarrow (0.2)^{1.2} < \sqrt{0.2} < (0.2)^{0.2} < (0.2)^{-0.2} < 1$$

③第三種錯誤類型為未注意底數比 1 小且不知道 1 為除了 0 之外任何數的 0 次方，錯誤原因為指數概念錯誤，計算過程如下：

1.  $(0.2)^{1.2}、(0.2)^{1.2}、(0.2)^{-0.2}、\sqrt{0.2}$  與 1

$$\Rightarrow (0.2)^{1.2}、(0.2)^{1.2}、(0.2)^{-0.2}、(0.2)^{0.5} \text{ 與 } 1$$

又  $1.2 > 1 > 0.5 > 0.2 > -0.2$

$$\Rightarrow (0.2)^{1.2} > 1 > \sqrt{0.2} > (0.2)^{0.2} > (0.2)^{-0.2}$$

2.  $(0.2)^{1.2}、(0.2)^{1.2}、(0.2)^{-0.2}、\sqrt{0.2}$  與 1

$$\Rightarrow (0.2)^{1.2}、(0.2)^{1.2}、(0.2)^{-0.2}、(0.2)^{0.5} \text{ 與 } 1$$

又  $1.2 > 0.5 > 0.2 > -0.2$  且  $1 > 0.2$

$$\Rightarrow 1 > (0.2)^{1.2} > \sqrt{0.2} > (0.2)^{0.2} > (0.2)^{-0.2}$$

④第四種錯誤類型為不會將根式和 1 化為指數，錯誤原因為指數概念錯誤，計算過程如下：

$$(0.2)^{1.2}、(0.2)^{1.2}、(0.2)^{-0.2}、\sqrt{0.2} \text{ 與 } 1$$

又  $1.2 > 0.2 > -0.2$

$$\Rightarrow (0.2)^{1.2} < (0.2)^{0.2} < \sqrt{0.2} < (0.2)^{-0.2} < 1$$

⑤第五種錯誤類型為任意排列湊出答案，錯誤原因為缺乏指數概念。

### 三、第三大題

#### (一) 試題分析

本大題設計的目的，想研究學生解指數方程式所使用的解題策略，以及在面臨數學問題的時候，所發生的困難與錯誤原因為何。

#### (二) 結果分析

表 4-2-17 第三大題學生答題情形統計表

題號	答對人數	錯誤人數	答對率	錯誤率	空白人數
1	89	50	64.03%	35.97%	17
2	112	27	80.58%	19.42%	10
3	69	70	49.64%	50.36%	38

(三) 錯誤類型與原因分析：

1. 試題三、1： $(\sqrt{2})^{3x-2} = 8\sqrt{2}$ ，則  $x = \underline{\hspace{2cm}}$ 。答案：3

(1) 錯誤類型分析：

表 4-2-18 試題三、1 錯誤答案類型統計表

錯誤類型	錯誤答案	錯誤人數	佔總錯誤人數的百分比
1	$\frac{10}{3}, \frac{8}{3}$	19	38.00%
2	$\frac{10}{3}, \frac{8}{3}, \frac{7}{3}$	7	14.00%
3	2	2	4.00%
4	$\frac{3}{4}$	2	4.00%
5	$\frac{5}{3}$	3	6.00%
6	空白	17	34.00%

(2) 由學生作答情形及面談資料分析錯誤原因如下：

①第一種錯誤類型為依現有數據拼湊答案，錯誤原因為缺乏指數概念，計算過程如下：

$$1. (\sqrt{2})^{3x-2} = 8\sqrt{2} \Rightarrow 3x-2 = 8 \Rightarrow x = \frac{10}{3}$$

$$2. (\sqrt{2})^{3x-2} = 8\sqrt{2} = 2^3\sqrt{2} \Rightarrow 3x-2 = 6 \Rightarrow x = \frac{8}{3}$$

②第二種錯誤類型為誤植題目或計算錯誤，錯誤原因為粗心疏忽的漏失，計算過程如下：

$$1. 8\sqrt{2} = \sqrt{2}^8 \Rightarrow 3x - 2 = 8 \Rightarrow x = \frac{10}{3}$$

$$2. (\sqrt{2})^{3x-2} = 8\sqrt{2} \Rightarrow 3^{\frac{3x-2}{2}} = 3^{\frac{8}{2}} \Rightarrow 3x - 2 = 8 \Rightarrow x = \frac{8}{3}$$

$$3. (\sqrt{2})^{3x-2} = 8\sqrt{2} \Rightarrow 2^{\frac{3x-2}{2}} = 2^{2+\frac{1}{2}} \Rightarrow 3x - 2 = 4 + 1 \Rightarrow x = \frac{7}{3}$$

③第三種錯誤類型是將 $ka^n$ 誤用為 $(ka)^n$ ，錯誤原因為指數概念錯誤，計算過程如下：

$$(\sqrt{2})^{3x-2} = 8\sqrt{2} \Rightarrow \text{同乘 } \sqrt{2}, 2^{3x-2} = 16 = 2^4 \Rightarrow x = 2$$

④第四種錯誤類型是將 $k\sqrt{a}$ 誤認為 $a^{\frac{1}{k}}$ ，錯誤原因為指數概念錯誤，計算過程如下：

$$(\sqrt{2})^{3x-2} = 8\sqrt{2} \Rightarrow 2^{\frac{3x-2}{2}} = 2^{\frac{1}{8}} \Rightarrow x = \frac{3}{4}$$

⑤第五種錯誤類型是將 $a^m \cdot a^n$ 誤用為 $a^{m \cdot n}$ ，錯誤原因為指數律錯誤，計算過程如下：

$$(\sqrt{2})^{3x-2} = 8\sqrt{2} \Rightarrow 2^{\frac{3x-2}{2}} = 2^{3 \times \frac{1}{2}} \Rightarrow x = \frac{5}{3}$$

$$2. \text{ 試題三、2: } \left(\frac{5}{7}\right)^{2x-1} = \left(\frac{7}{5}\right)^{x-6}, \text{ 則 } x = \underline{\hspace{2cm}}. \text{ 答案: } \frac{7}{3}$$

(1) 錯誤類型分析：

表 4-2-19 試題三、2 錯誤答案類型統計表

錯誤類型	錯誤答案	錯誤人數	佔總錯誤人數的百分比
1	$-\frac{7}{3}, 7, 2, \frac{8}{3}$	8	29.63%
2	-5	4	14.81%
3	$\frac{5}{3}$	5	18.52%
4	空白	10	37.04%

(2) 由學生作答情形及面談資料分析錯誤原因如下：

①第一種錯誤類型為筆誤或計算錯誤，錯誤原因為粗心疏忽的漏失，計算過程如下：

$$1. \left(\frac{5}{7}\right)^{2x-1} = \left(\frac{7}{5}\right)^{x-6} \Rightarrow \left(\frac{5}{7}\right)^{-2x+1} = \left(\frac{7}{5}\right)^{x-6} \Rightarrow -2x+1 = x-6$$

$$\Rightarrow -3x = -7 \Rightarrow x = -\frac{7}{3}$$

$$2. \left(\frac{5}{7}\right)^{2x-1} = \left(\frac{7}{5}\right)^{x-6} \Rightarrow \left(\frac{5}{7}\right)^{2x-1} = \left(\frac{5}{7}\right)^{-x+6} \Rightarrow 2x-1 = -x+6 \Rightarrow x=7$$

$$3. \left(\frac{5}{7}\right)^{2x-1} = \left(\frac{7}{5}\right)^{x-6} \Rightarrow \left(\frac{5}{7}\right)^{2x-1} = \left(\frac{5}{7}\right)^{-x+6} \Rightarrow 2x-1 = -x+6 \Rightarrow 3x=6 \Rightarrow x=2$$

$$4. \left(\frac{5}{7}\right)^{2x-1} = \left(\frac{7}{5}\right)^{x-6} \Rightarrow \left(\frac{5}{7}\right)^{2x-1} = \left(\frac{5}{7}\right)^{-x+6} \Rightarrow 2x-1 = -x+6 \Rightarrow 3x=8 \Rightarrow x=\frac{8}{3}$$

②第二種錯誤類型為未注意底的不同，錯誤原因為指數概念錯誤，計算過程如下：

$$\left(\frac{5}{7}\right)^{2x-1} = \left(\frac{7}{5}\right)^{x-6} \Rightarrow 2x-1 = x-6 \Rightarrow x=-5$$

③第三種錯誤類型為遺漏負號，錯誤原因為粗心疏忽的漏失，計算過程如下：

$$\left(\frac{5}{7}\right)^{2x-1} = \left(\frac{7}{5}\right)^{x-6} \Rightarrow \left(\frac{7}{5}\right)^{-2x-1} = \left(\frac{7}{5}\right)^{x-6} \Rightarrow -2x-1 = x-6 \Rightarrow x=\frac{5}{3}$$

3. 試題三、3： $25^x - 4 \cdot 5^x - 5 = 0$ ，則  $x = \underline{\hspace{2cm}}$ 。答案：1

(1) 錯誤類型分析：

表 4-2-20 試題三、3 錯誤答案類型統計表

錯誤類型	錯誤答案	錯誤人數	佔總錯誤人數的百分比
1	-1 或 5	17	24.29%
2	5	9	12.86%
3	1	2	2.86%
4	$-\frac{1}{5}$ 或 $\frac{3}{5}$	4	5.71%
5	空白	38	84.26%

(2) 由學生作答情形及面談資料分析錯誤原因如下：

①第一種錯誤類型為未完成作答，錯誤原因為粗心疏忽的漏失，計算過程如下：

$$\text{設 } 5^x = A, \text{ 則 } A^2 - 4A - 5 = 0 \Rightarrow (A-5)(A+1) = 0 \Rightarrow A = -1 \text{ 或 } 5$$

②第二種錯誤類型是將  $a^x > 0$  誤認為  $x > 0$ ，錯誤原因為新舊學習經驗的互相干擾，計算過程如下：

$$\text{設 } 5^x = A, \text{ 則 } A^2 - 4A - 5 = 0 \Rightarrow (A-5)(A+1) = 0 \Rightarrow A = -1 \text{ 或 } 5$$

$$\Rightarrow 3^x = -1 \text{ 或 } 5 \Rightarrow x = -1 \text{ (不合) 或 } 5$$

③第三種錯誤類型是將  $(ka)^n$  誤用為  $ka^n$ ，錯誤原因為指數律錯誤，計算過程如下：

$$\text{設 } 5^x = A, \text{ 則 } 5A - 4A - 5 = 0 \Rightarrow 5^x = 5 \Rightarrow x = 1$$

④第四種錯誤類型是將  $a^x = k$  誤用為  $x = \frac{k}{a}$ ，錯誤原因為指數概念錯誤，計算過程

如下：

$$\text{設 } 5^x = A, \text{ 則 } A^2 - 4A - 5 = 0 \Rightarrow (A-5)(A+1) = 0 \Rightarrow A = -1 \text{ 或 } 5$$

$$\Rightarrow 5^x = -1 \text{ 或 } 5 \Rightarrow x = -\frac{1}{5} \text{ 或 } \frac{3}{5}$$

四、第四大題：

(一) 試題分析：

本大題設計的目的，主要是想探索學生對於指數不等式題目的解題策略、思考方式，以及在解題時會有哪些錯誤類型及背後的原因。

(二) 結果分析：

表 4-2-21 第四大題學生答題情形統計表

題號	答對人數	錯誤人數	答對率	錯誤率	空白人數
1	89	50	64.03%	35.97%	23
2	53	86	38.13%	61.87%	36

(三) 錯誤類型與原因分析：

1. 試題四、1： $7^{3-x} < 49^{-x}$ ，則  $x$  的範圍為\_\_\_\_\_。

答案： $x < -3$

(1) 錯誤類型分析：

表 4-2-22 試題四、1 錯誤答案類型統計表

錯誤類型	錯誤答案	錯誤人數	佔總錯誤人數的百分比
1	$x < -\frac{1}{2}$	19	38.00%
2	$x > -3$	6	12.00%
3	$x = -3$	2	4.00%
4	空白	23	46.00%

(2) 由學生作答情形及面談資料分析錯誤原因如下：

①第一種錯誤類型為依現有數據拼湊答案，錯誤原因為缺乏指數概念，計算過程如下：

$$7^{3-x} < 49^{-x} \Rightarrow 21 - 7x < -49x \Rightarrow x < -\frac{1}{2}$$

②第二種錯誤類型為不等式乘負號而未變號，錯誤原因為不等式概念不清楚，計算過程如下：

$$7^{3-x} < 49^{-x} \Rightarrow 7^{3-x} < 7^{-2x} \Rightarrow 3 - x < -2x \Rightarrow -x > 3 \Rightarrow x > -3$$

③第三種錯誤類型是將不等式誤認為解方程式，錯誤原因為不等式概念不清楚，計算過程如下：

$$5^{x-3} < 25^x \Rightarrow 5^{x-3} = 5^{2x} \Rightarrow x - 3 = 2x \Rightarrow x = -3$$

2. 試題四、2： $(0.2)^{3x} > 0.008$ ，則  $x$  的範圍為\_\_\_\_\_。

答案： $x < 1$

(1) 錯誤類型分析：

表 4-2-23 試題四、2 錯誤答案類型統計表

錯誤類型	錯誤答案	錯誤人數	佔總錯誤人數的百分比
1	$x > 4$	26	30.23%
2	$x > \frac{0.04}{3}$	19	22.09%
3	$x = 1$	2	2.32%
4	$x < \frac{4}{3}$	3	3.49%
5	空白	36	41.86%

(2) 由學生作答情形及面談資料分析錯誤原因如下：

①第一種錯誤類型為底數小於 1 而未變號，錯誤原因為指數不等式概念錯誤，計算過程如下：

$$(0.2)^{3x} > 0.008 \Rightarrow (0.2)^{3x} > (0.2)^3 \Rightarrow 3x > 3 \Rightarrow x > 1$$

②第二種錯誤類型為依現有數據拼湊答案，錯誤原因為缺乏指數概念，計算過程如下：

$$(0.2)^{3x} > 0.008 \Rightarrow 3x > 0.04 \Rightarrow x > \frac{0.04}{3}$$

③第三種錯誤類型是將不等式誤認為解方程式，錯誤原因為不等式概念不清楚，計算過程如下：

$$(0.2)^{3x} > 0.008 \Rightarrow (0.2)^{3x} = (0.2)^3 \Rightarrow 3x = 3 \Rightarrow x = 1$$

④第四種錯誤類型為小數化指數錯誤，錯誤原因為指數概念錯誤，計算過程如下：

$$(0.2)^{3x} > 0.008 \Rightarrow (0.2)^{3x} > (0.2)^4 \Rightarrow 3x < 4 \Rightarrow x < \frac{4}{3}$$

## 五、第五大題：

## (一) 試題分析：

本大題設計的目的，主要是想探討學生對於指數概念及指數律的熟悉程度，面對以文字表示指數會使用的策略與方法以及在解題時會有哪些錯誤類型及背後原因

## (二) 結果分析：

表 4-2-24 第五大題學生答題情形統計表

題號	答對人數	錯誤人數	答對率	錯誤率	空白人數
1	63	76	45.32%	54.68%	31
2	88	51	63.31%	36.69%	32

## (三) 錯誤類型與原因分析：

1. 試題五、1：已知 $9^x = 10$ ，則 $3^x = \underline{\hspace{2cm}}$ 。答案： $\sqrt{10}$

## (1) 錯誤類型分析：

表 4-2-25 試題五、1 錯誤答案類型統計表

錯誤類型	錯誤答案	錯誤人數	佔總錯誤人數的百分比
1	$\pm\sqrt{10}$	5	6.58%
2	5	13	17.11%
3	$\frac{10}{3}$	27	35.53%
4	空白	31	40.79%

## (2) 由學生作答情形及面談資料分析錯誤原因如下：

①第一種錯誤類型為未考慮到 $a^x > 0$ ，錯誤原因為指數函數概念不清楚，計算過程如下：

$$9^x = (3^2)^x = 3^{2x} = (3^x)^2 = 10 \Rightarrow 3^x = \pm\sqrt{10}$$

②第二種錯誤類型為 $a^n$ 誤用為 $na$ ，錯誤原因為粗心疏忽的漏失，計算過程如下：

$$9^x = (3^2)^x = 3^{2x} = (3^x)^2 = 2 \times 3^x = 10 \Rightarrow 3^x = \frac{10}{2} = 5$$

③第三種錯誤類型是將 $(ka)^n$ 誤用為 $ka^n$ ，錯誤原因為指數律錯誤，計算過程如下：

$$9^x = 3 \times 3^x = 10 \Rightarrow 3^x = \frac{10}{3}$$

2. 試題五、2：設  $3^{0.7} = a$ 、 $3^{0.05} = b$ ，則以  $a$ 、 $b$  表示  $3^{0.75}$  為\_\_\_\_\_。

答案： $ab$

(1) 錯誤類型分析：

表 4-2-26 試題五、2 錯誤答案類型統計表

錯誤類型	錯誤答案	錯誤人數	佔總錯誤人數的百分比
1	$a+b$	9	17.65%
2	$3^a \times 3^b$	3	5.88%
3	$3^{a+b}$	7	13.73%
4	空白	32	62.75%

(2) 由學生作答情形及面談資料分析錯誤原因如下：

①第一種錯誤類型是將  $a^{m+n}$  誤用為  $a^m + a^n$ ，錯誤原因為指數律錯誤，計算過程如下：

$$3^{0.75} = 3^{0.7+0.05} = 3^{0.7} + 3^{0.05} = a + b$$

②第二種錯誤類型筆誤，錯誤原因為粗心疏忽的漏失，計算過程如下：

$$3^{0.75} = 3^{0.7+0.05} = 3^{0.7} \times 3^{0.05} = 3^a \times 3^b$$

③第三種錯誤類型為依現有數據拼湊答案，錯誤原因為缺乏指數概念，計算過程如下：

$$3^{0.75} = 3^{0.7+0.05} = 3^{a+b}$$

六、第六大題：

(一) 試題分析：

本大題設計的目的，主要是想探討學生對於指數函數問題在應用上的錯誤類型與錯誤原因。

(二) 結果分析：

表 4-2-27 第六大題學生答題情形統計表

題號	答對人數	錯誤人數	答對率	錯誤率	空白人數
1	50	89	35.97%	64.03%	42
2	32	107	23.02%	76.98%	51

(三) 錯誤類型與原因分析：

1. 試題六、1：某國家人口每 20 年增加一倍，若現有 100 萬人，則 100 年後

有\_\_\_\_\_萬人。答案：3200

(1) 錯誤類型分析：

表 4-2-28 試題六、1 錯誤答案類型統計表

錯誤類型	錯誤答案	錯誤人數	佔總錯誤人數的百分比
1	500	19	21.35%
2	$100^5$	3	3.37%
3	1000	11	12.36%
4	600	14	15.73%
5	空白	42	47.49%

(2) 由學生作答情形及面談資料分析錯誤原因如下：

①第一種錯誤類型為依現有數據拼湊答案，錯誤原因為缺乏指數概念，計算過程如下：

$$100 \div 20 = 5 \Rightarrow 100 \times 5 = 500$$

②第二種錯誤類型為因指數單元而用次方，錯誤原因為缺乏指數概念，計算過程如下：

$$100 \div 20 = 5 \Rightarrow 100^5$$

③第三種錯誤類型為忽略原本的人口，錯誤原因為粗心疏忽的漏失，計算過程如下：

$$\text{時間：} 20 \rightarrow 40 \rightarrow 60 \rightarrow 80 \rightarrow 100$$

$$\text{人口：} 100 \rightarrow 200 \rightarrow 400 \rightarrow 800 \rightarrow 1000$$

④第四種錯誤類型為誤解題意，錯誤原因為對題目的條件認知不足，計算過程如下：

$$100 \div 20 = 5 \Rightarrow 100 \times 5 = 500 \Rightarrow 100 + 500 = 600$$

2. 試題六、2：將 100000 元存入銀行，年利率 10%，複利計算，則 3 年後的本利和為\_\_\_\_\_元。答案：133100 元

(1) 錯誤類型分析：

表 4-2-29 試題六、2 錯誤答案類型統計表

錯誤類型	錯誤答案	錯誤人數	佔總錯誤人數的百分比
1	$100000(1+10\%)^3$	24	22.43%
2	103000	7	6.54%
3	100100	8	7.48%

4	計算錯誤	17	15.89%
5	空白	51	47.66%

(2) 由學生作答情形及面談資料分析錯誤原因如下：

①第一種錯誤類型為未化簡算出答案，錯誤原因為指數運算不熟悉，計算過程如下：

$$100000(1+10\%)^3 =$$

②第二種錯誤類型為將複利視為單利，錯誤原因為對題目的條件認知不足，計算過程如下：

$$100000 \times 10\% \times 3 + 100000 = 103000$$

③第三種錯誤類型為記錯複利公式，將本利和公式  $p(1+r)^n$  記錯成  $p(1+r^n)$ ，錯誤原因為先備知識不足或受教師口訣的影響，計算過程如下：

$$100000[1+(10\%)^3] = 100100$$

④第四種錯誤類型為計算錯誤，錯誤原因為粗心疏忽的漏失，計算過程如下：

$$100000(1+10\%)^3 = 13310$$

經由筆試及分析面談驗證，可獲得下列結論：

### 一、學生在指數單元的錯誤情形

- (一)學生在指數的應用問題錯誤率頗高。他們在解題的時候時常有所疏漏、考慮不周、或題目看錯，題意誤會的情形。顯示學生在解題時的細心與專注有待加強。
- (二)遇到題目有所變化或綜合題，答對情形就會明顯降低。
- (三)當題目的形式較複雜或是學生不常見的類型，學生的空白率較其餘題目高出許多。
- (四)同學們在使用乘法公式時有時會誤用，並且認為理所當然，甚至有亂代公式情形出現。
- (五)對於文字的敘述的理解總是會干擾同學的答題，也影響了答題的意願。
- (六)學生在計算方面的謹慎性不足。也許學生的解題策略及方式都正確，但容易因為些微的疏忽或不小心而影響了答題。
- (七)舊經驗對於學生的答題佔非常重要的因素，學生總是先思考我有沒有看過，猜想可能的解答方式，並非明確清楚題目與所求進而建立解題策略而去解題。因此不常見或轉化的題目，也許不難，但學生往往表現不如預期。
- (八)部分同學對於指數錯誤的運算規則(指數律)總認為理所當然，可是卻錯誤百出。必須經過適當的認知衝突，澄清觀念，才能使學生的觀念正確穩固。

### 二、學生在指數單元的錯誤類型

- (一)概念造成的錯誤：指數概念不清楚、指數律混淆。
- (二)備知識的不足：四則運算、十字交乘法、因式分解、根式運算、根式有理化或化簡、平方根概念、乘法公式、方程式的解、不等式的解等基礎數學知識不足。
- (三)計算錯誤、筆誤、遺漏負號、題目抄寫錯誤、答案抄寫錯誤。

- (四)忽視條件產生的錯誤：將不等式誤認為解方程式、將  $a^x > 0$  誤認為  $x > 0$ 、比較大小未注意底數。
- (五)將文字符號任意代數字或認為答案應該是數字。
- (六)沒有解題能力及作答動機：依現有數據拼湊答案、將  $a^x = k$  誤用為  $x = \frac{k}{a}$ 。

### 三、學生在指數單元的錯誤原因

藉由錯誤類型的分析，可以了解造成學生錯誤的原因有以下九種：

- (一)對指數定義及指數律的觀念不清楚，指數函數圖形概念模糊。
- (二)受先前學習過的知識或本單元學習經驗的影響作錯誤的推論。
- (三)缺乏預備知識、先前技巧欠熟練。
- (四)忽略題目所給的條件、把給定的條件特殊化。
- (五)受題目情境設計、文字敘述及編排方式的影響。
- (六)文字符號概念模糊。
- (七)專注力不足，粗心疏忽的漏失。
- (八)憑直覺或關鍵字作答。
- (九)不合邏輯的推論。

本研究是探討高職一年級學生在指數單元的錯誤情形與犯錯原因。根據本研究結果，研究者在教學上及未來研究上，分別提出一些建議。

#### 一、在教學上的建議

- (一)教師在教學前應瞭解學生的預備知識來設計教學內容，對於國中部分課程的觀念如乘法公式、四則運算性質、十字交乘法、方程式解的概念等，應做適當的銜接課程與複習，避免學生做錯誤的推論與運算，進而以減少學生的學習障礙。
- (二)學生在學習數學總是喜歡記憶公式，對於公式推導的步驟、過程或理論延伸的情形均不理解，且學校老師因為教學進度及考試的壓力，往往講解一次概念原由後便不再強調原因，造成學生在學習的重點錯誤。因此教師在進行指數單元教學時，應將「指數律」的概念講述清楚，並舉例說明，不應該只傳授口訣或技巧，造成學生死記「指數律」，而未真正理解其意義。
- (三)教師若能在教學或評量時，對同一種概念或題型，以多元的方式來呈現、比較，如此便能避免使學生出現學習僵化的現象，並且讓學生能在腦海裡有張清晰的觀念圖，協助學生經驗的類化，以增進正向遷移的效果。
- (四)在教學上宜針對學生易產生的錯誤，利用正例與非例及問答的技巧讓學生產生認知衝突，進而澄清觀念，讓學生觀念穩固，對於學生數學的學習會有相當助益。
- (五)本研究中發現，學生對於應用問題的答題率很低，其原因是受題目情境設計與文字敘述的影響。因此，教師教學時，應盡量將數學問題融入日常生活中，讓學生習慣在生活情境中利用數學來解決問題。如此學生才能理解這樣的數學內容，對學生來講，才是有實質意義，學生學習起來才會更有興趣。並且訓練學生解決問題的能力。此能力提升，相信學生解決數學問題的能力也會提升。
- (六)教學時，應增加課堂間相互討論的機會，鼓勵學生多發問、多思考，藉此可以協助學生修正自己的錯誤觀念；另一方面，評量的內容應多元設計，讓學生思考與

比較同一概念、題型的多樣性，避免學生產生習慣僵化的情形而造成學習的負遷移。

## 二、對未來研究的建議

- (一)本研究是以高雄地區某四所高職一年級學生作為研究對象，主要探討高雄高職一年級學生指數概念及運算的錯誤情形，亦未比較不同縣市，或未使用同一版本的學習成效有何不同。因此在研究結果上無法作全面性的推論研究結果是否會因著對象在年紀，性別或地區上等不同的差異，而造成不同的結果，有待進一步的研究。
- (二)本研究僅由學生紙筆測驗結果以及面談的內容來分析其錯誤的可能原因，建議未來可增加教室教學觀察的方式，瞭解學生於上課時，師生互動時所呈現的錯誤概念及想法，如此才能更深入了解學生犯錯的原因。